**Определения, теоремы, следствия по геометрии 9 класса.**

1. **Определение вектора.**
* Такие физические величины, как сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризующиеся не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве называются **векторными величинами (векторами)**.
* Концы отрезка называют **граничными точками отрезка**.
* Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**. Обозначают $\vec{AB} $или $\vec{а}$.
1. **Определение нулевого вектора.**
* Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым.** Начало нулевого вектора совпадает с его концом. Обозначают $\vec{АА}$ или $\vec{0}$.
1. **Определение длины или модуля вектора.**
* **Длиной или модулем ненулевого вектора** $\vec{АВ}$ называется длина отрезка АВ. Обозначают $\left|\vec{АВ}\right|$ или $\left|\vec{а}\right|$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю $\left|\vec{0}\right|=0$.

1. **Определение коллинеарных векторов.**
* Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
* Нулевой вектор считается **коллинеарным** любому вектору.
1. **Определение сонаправленных векторов.**
* Если два ненулевых вектора коллинеарны и направлены одинаково, то они называются **сонаправленными**. Обозначают $\vec{a}\uparrow \uparrow \vec{b}$.
* Если два ненулевых вектора коллинеарны и противоположно направлены, то они называются **противоположно направленными**. Обозначают $\vec{a}\uparrow \downright \vec{b}$.
* Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.
1. **Определение равных векторов.**
* Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. Обозначают $\vec{a}=\vec{b}$.
1. **Утверждение об откладывании вектора от данной точки.**
* Если точка А – начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что **вектор** $\vec{a}$ **отложен то точки А**.

От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

1. **Определение суммы векторов (правило треугольника).**
* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки вектор $\vec{АВ}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\vec{ВС}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\vec{АС}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$. Обозначают $\vec{a}$ + $\vec{b}$.

 **B**

 $\vec{a}$ $\vec{b}$

 $\vec{a}$ $\vec{b}$

 **A** **C**

Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**.

* Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}$ **+** $\vec{0}=\vec{a}$**.**
1. **Законы сложения векторов.**
* Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

**1°.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ **(переместительный закон).**

**2°.** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ **(сочетательный закон).**

1. **Правило параллелограмма.**
* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отложим от какой-нибудь точки А векторы $\vec{AB}=\vec{a}$ и $\vec{AD}=\vec{b}$ и построим параллелограмм ABCD. Тогда вектор $\vec{AC}$ равен $\vec{a}$ + $\vec{b}$.

 $\vec{b}$

 **B** $\vec{b}$ **C**

$\vec{a}$ + $\vec{b}$

 $\vec{a}$ $\vec{a}$

 $\vec{a}$

 **A**  $\vec{b}$ **D**

Такое правило сложения векторов называется **правилом параллелограмма.**

1. **Определение суммы нескольких векторов (правило многоугольника).**
* Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – векторы. От произвольной точки А отложим вектор $\vec{AB}=\vec{a}$, затем от точки В отложим вектор $\vec{BC}=\vec{b}$ и от точки С отложим вектор $\vec{CD}=\vec{c}$. В результате получится вектор $\vec{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

 $\vec{b}$

 **B** $\vec{b}$ **C**

 $\vec{a}$ $\vec{a}$ $\vec{c}$ $\vec{c}$

 **A** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ **D**

Аналогично строят сумму четырех, пяти и любого числа векторов.

Такое правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**.

1. **Определение вычитания векторов.**
* **Разностью векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Обозначают $\vec{a}$ − $\vec{b}$.

 $\vec{a}$ **B** $-\vec{b}$ **A**

 $\vec{b}$ $\vec{a}$

$\vec{a}$ − $\vec{b}$

 **O**

1. **Определение вектора, противоположного данному.**
* Пусть $\vec{a}$ – произвольный ненулевой вектор.

**Вектор** $\vec{a}$**1** называется **противоположным вектору** $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}$1 имеют равные длины и противоположно направлены. Обозначается $-\vec{a}$.

* Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.
* $\vec{a}$ **+ (−**$\vec{a}$**)=0.**
1. **Теорема о разности двух векторов.**
* Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a}$ **−** $\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$**.**
1. **Определение произведения вектора на число.**
* **Произведением ненулевого вектора** $\vec{a}$ **на число** $k$ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $\left|k\right|∙\left|\vec{a}\right|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **сонаправлены при** $k\geq 0$ и **противоположно направлены при** $k<0$.
* Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. $\vec{0}∙k=\vec{0}$
* Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор. $\vec{a}∙0=\vec{0}$**.**
* Для любого числа *k* и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и *k*$\vec{a}$ коллинеарны.
1. **Свойства умножения вектора на число.**
* Для любых чисел *k*, *l* и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

**1°.** $\left(kl\right)\vec{a}=k\left(l\vec{a}\right)$ **(сочетательный закон).**

**2°.** $\left(k+l\right)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ **(первый распределительный закон).**

**3°.** $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ **(второй распределительный закон).**

1. **Применение векторов к решению задач.**
* Если точка *С* – середина отрезка *АВ*, а *О* – произвольная точка плоскости, то $\vec{OC}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$. О

 А С В

* Прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

 О

 В М С

 А N D

1. **Определение средней линии трапеции.**
* **Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.
1. **Теорема о средней линии трапеции.**
* Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Т.е. если MN – средняя линия трапеции ABCD, то MN‖AD и $MN=\frac{AD+BC}{2}$.

 B C

 M N

 A D

1. **Лемма о коллинеарных векторах.**
* Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} $коллинеарны и $\vec{a}\ne \vec{0}$, то существует такое число *k*, что $b=k\vec{a}$.
1. **Определение вектора разложенного по векторам.**
* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два данных вектора.

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где *x* и *y* – некоторые числа, то говорят, что **вектор** $\vec{p}$ **разложен по векторам** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$**.**

Числа *x* и *y* называются **коэффициентами разложения**.

1. **Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.**
* На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.
1. **Определение координатных векторов.**
* Понятие **прямоугольной системы координат** известно из алгебры.

Для задания прямоугольной системы координат нужно провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрать направление и единицу измерения отрезков.

Отложим от начала координат *О* единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпало с направлением оси *Ox*, а направление вектора $\vec{j}$ – с направлением оси *Oy*.

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются **координатными векторами**.

1. **Определение координат вектора.**
* Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}$, причем коэффициенты разложения (числа *x* и *y*) определяются единственным образом.
* Коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам называются **координатами вектора** $\vec{p}$ **в данной системе координат**. Обозначают $\vec{p}\left\{x;y\right\}$.
* Координаты нулевого вектора равны нулю $\vec{0}\left\{0;0\right\}$.
* Координаты равных векторов соответственно равны. Т. е. если векторы $\vec{a}=x\_{1}\vec{i}+y\_{1}\vec{j}$ и $\vec{b}=x\_{2}\vec{i}+y\_{2}\vec{j}$ равны, то $x\_{1}=x\_{2}$ и $y\_{1}=y\_{2}$.
1. **Правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.**

**1°.** Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Т.е. $\vec{a}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$ – векторы. Т.к. $\vec{a}=x\_{1}\vec{i}+y\_{1}\vec{j}$ и $\vec{b}=x\_{2}\vec{i}+y\_{2}\vec{j}$ получим $\vec{a}+\vec{b}=\left\{x\_{1}+x\_{2};y\_{1}+y\_{2}\right\}$.

**2°**. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Т.е. $\vec{a}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$ – векторы. Т.к. $\vec{a}=x\_{1}\vec{i}+y\_{1}\vec{j}$ и $\vec{b}=x\_{2}\vec{i}+y\_{2}\vec{j}$ получим $\vec{a}-\vec{b}=\left\{x\_{1}-x\_{2};y\_{1}-y\_{2}\right\}$.

**3°.** Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Т.е. $\vec{a}\left\{x;y\right\}$ – данный вектор. *k* – произвольное число. Т.к. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ получим $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Следовательно $k\vec{a}\left\{kx;ky\right\}$.

**26. Определение радиус-вектора.**

* $M\left(x;y\right)$ – произвольная точка на прямоугольной системе координат.

Вектор $\vec{OM}$ называется **радиус-вектором точки *М***.

 *y*

 M2 ***M(x;y)***

 $\vec{j}$

 O $\vec{i}$ M1  *x*

* **Координаты точки *М* равны соответствующим координатам ее радиус-вектора. *M(x;y)* и** $\vec{OM}\left\{x;y\right\}$.

Т.к. $\vec{OM}=\vec{OM\_{1}}+\vec{OM\_{2}}=x\vec{i}+y\vec{j}$, след-но $\vec{OM}\left\{x;y\right\}$.

1. **Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца.**
* **Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его начала и конца.** $\vec{AB}=\left\{x\_{2}-x\_{1};y\_{2}-y\_{1}\right\}$**.**

Пусть $\vec{AB}$ – данный вектор. $A\left(x\_{1};y\_{1}\right) $– начало вектора и $B\left(x\_{2};y\_{2}\right)$ – конец вектора. Т.к. $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, а $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$ – радиус-векторы точек *В* и *А*, значит $\vec{OB}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$, $\vec{OA}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$. След-но $\vec{AB}=\left\{x\_{2}-x\_{1};y\_{2}-y\_{1}\right\}$.

 *y*

 $B\left(x\_{2};y\_{2}\right)$

 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$

 $A\left(x\_{1};y\_{1}\right)$

 О  *x*

1. **Определение метода координат.**
* Изучение свойств геометрических фигур с использованием методов алгебры называется **методом координат.**
1. **Простейшие задачи в координатах.**
* **Координаты середины отрезка.**

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Пусть ***С(x,y)*** – середина отрезка *АВ*. $A\left(x\_{1};y\_{1}\right)$, $B\left(x\_{2};y\_{2}\right)$ – концы отрезка *АВ*, тогда$x=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}, y=\frac{y\_{1}+y\_{2}}{2}$**.**

* **Вычисление длины вектора по его координатам.**

Длина вектора $\vec{a}\left\{x;y\right\}$ вычисляется по формуле $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$.

* **Расстояние между двумя точками.**

Расстояние между точками выражается формулой $d=\sqrt{\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}+\left(y\_{2}-y\_{1}\right)^{2}}$**.**

Пусть $M\_{1}\left(x\_{1};y\_{1}\right)$ и $M\_{2}\left(x\_{2};y\_{2}\right)$ - некоторые точки. *d* – расстояние между точками $M\_{1}$ и $M\_{2}$, тогда $d=\sqrt{\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}+\left(y\_{2}-y\_{1}\right)^{2}}$**.**

1. **Определение уравнения линии на плоскости.**
* Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат *Oxy* и дана некоторая линия *L*. Уравнение с двумя переменными *x* и *y* называется **уравнением линии *L***, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии *L* и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

 *x* $ M\left(x;y\right)$

 L

 O *y*

1. **Уравнение окружности.**
* В прямоугольной системе координат **уравнение окружности** радиуса *r* с центром в точке $C\left(x\_{0};y\_{0}\right)$ имеет вид: $\left(x-x\_{0}\right)^{2}+\left(y-y\_{0}\right)^{2}=r^{2}$**.**
* Уравнение окружности радиуса *r* с центром в начале координат имеет вид $x^{2}+y^{2}=r^{2}$**.**
1. **Уравнение прямой.**
* Уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени $ax+by+c=0$. Если в этом уравнении$b\ne 0$, то его можно записать так $y=kx+d$**,** где $k=-\frac{a}{b}, d=-\frac{c}{b}$ **.**

Число ***k*** называется **угловым коэффициентом прямой**.

1. **Свойства углового коэффициента.**
* Две параллельные прямые, не параллельные оси *Oy*, имеют одинаковые угловые коэффициенты;
* Если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.
1. **Определение концентрических окружностей.**
* Если центры окружностей совпадают, т. е. *d=0*, (*d* - расстояние между центрами окружностей) то окружности называют **концентрическими**, и окружность радиуса *r* лежит внутри круга радиуса *R*.
1. **Взаимное расположение двух окружностей.**
* Пусть *r, R*– радиусы окружностей, причем *r*$\leq $*R. d* - расстояние между центрами окружностей. Если *d*$\ne $*0*, то возможны пять случаев взаимного расположения двух окружностей:
1. $d<R-r$**, т. е.** $d+r<R$. В этом случае говорят, **одна окружность лежит внутри другой.** Окружности **не имеют общих точек**.
2. $d>R+r$**.** В этом случае говорят, что **одна окружность лежит вне другой**. Окружности **не имеют общих точек**.

1. $d=R-r$**,** при этом$R>r$**,** поскольку$d>0$**.** В этом случае говорят, что **окружности касаются изнутри**.

Окружности имеют **одну общую точку**.

Уравнения первой и второй окружностей имеют вид

$x^{2}+y^{2}=R^{2}$ и $\left(x-d\right)^{2}+y^{2}=r^{2}$.

Эта система имеет решение *x=R, y=0.*

1. $d=R+r$**.** В этом случае говорят, что **окружности касаются извне**.

Окружности имеют **одну общую точку**.

Уравнения первой и второй окружностей имеют вид

$x^{2}+y^{2}=R^{2}$ и $\left(x-d\right)^{2}+y^{2}=r^{2}$.

Эта система имеет решение *x=R, y=0.*

1. $R-r<d<R+r$**. Окружности пересекаются в двух точках.**

Уравнения первой и второй окружностей имеют вид

$x^{2}+y^{2}=R^{2}$ и $\left(x-d\right)^{2}+y^{2}=r^{2}$.

Эта система имеет два решения:

$x=x\_{0},y\_{0}=\sqrt{R^{2}-x\_{0}^{2}}$ и $x=x\_{0},y\_{0}=-\sqrt{R^{2}-x\_{0}^{2}}$.

1. **Определение единичной полуокружности.**
* Введем прямоугольную систему координат *Oxy* и построим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом и втором квадрантах. Такую полуокружность называют **единичной полуокружностью**.
1. **Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов от 0° до 180°.**

 *y*

 *C(0;1)* *М(x;y)*

$$α$$

 *B(-1;0)* O *D A(1;0)* *x*

Если угол $α$ острый, то из прямоугольного ∆DOM имеем $\sin(α)=\frac{MD}{OM}, \cos(α)=\frac{OD}{OM}$.

Но *OM=1, MD=y, OD=x*, поэтому $\sin(α)=y, \cos(α)=x$.

**Для любого угла** $α$ **из промежутка** $0°\leq α\leq 180°$ **синусом угла** $α$ **называется ордината *y* точки *М*, а косинусом угла** $α$ **– абсцисса *x* точки *М*.**

Так как координаты *(x;y)* точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0\leq y\leq 1, -1\leq x\leq 1$, то для люб. $α$ из промежутка $0°\leq α\leq 180°$ справедливы неравенства $0\leq \sin(α)\leq 1, -1\leq \cos(α)\leq 1$.

0° соответствует луч *ОА*, т.к. *А(1;0)*, **то** $\sin(0)°=0, \cos(0°)=1$.

90° соответствует луч *ОС*, т. к. *С(0;1),* то $\sin(90)°=1, \cos(90°)=0$.

180° соответствует луч *ОВ*, т. к. *В(-1;0),* то $\sin(180)°=0, \cos(180°)=-1$.

**Тангенсом угла** $α$ ($α\ne 90°$) называется отношение $\frac{\sin(α)}{\cos(α)}$, т.е. $tgα=\frac{\sin(α)}{\cos(α)}$**.**

***tg0°=0, tg180°=0***, при $α=90°$ tg$ α$ не определен, т.к. на нуль делить нельзя.

**Котангенсом угла** $α$ ($0°\leq α\leq 180°$) называется отношение $\frac{\cos(α)}{\sin(α)}$, т.е. $ctgα=\frac{\cos(α)}{\sin(α)}$**.**

***ctg90°=0*,** при $α=0°$ и $α=180°$ ctg$ α$ не определен, т.к. на нуль делить нельзя.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$α$$ | ***0°*** | ***90°*** | ***180°*** |
| $$\sin(α)$$ | 0 | 1 | 0 |
| $$\cos(α)$$ | 1 | 0 | -1 |
| ***tg***$ α$ | 0 | - | 0 |
| ***ctg***$ α$ | - | 0 | - |

1. **Основное тригонометрическое тождество.**
* Единичная полуокружность является дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^{2}+y^{2}=1$. Подставив в это уравнение $\sin(α)=y, \cos(α)=x$, получим равенство $$, которое выполняется для любого $α$ из промежутка $0°\leq α\leq 180°$.
1. **Формулы приведения.**
* $\sin(\left(90°-α\right)=\cos(α))$ **при** $0°\leq α\leq 90°$
* $\cos(\left(90°-α\right)=\sin(α))$ **при** $0°\leq α\leq 90°$
* $\sin(\left(180°-α\right)=\sin(α))$ **при** $0°\leq α\leq 180°$
* $\cos(\left(180°-α\right)=-\cos(α))$ **при** $0°\leq α\leq 180°$
1. **Формулы для вычисления координат точки.**

 *y*

  *A(x;y)*

 *M(cosα;sinα)*

$$α$$

 *O x*

Пусть *A(x;y)* – произв. точка, с неотриц. ординатой *y*, на сис. координат *Oxy*. Выразим координаты точки *А* через длину отрезка *ОА* и угол α. Точка *M(cosα;sinα)* – точка пересечения луча *ОА* с единич. полуокружностью. Вектор $\vec{OM}$ имеет те же координаты, что и точка *М*, т.е. $\vec{OM}\left\{\cos(α;\sin(α))\right\}$. Вектор $\vec{OA}$ имеет те же координаты, что и точка *A* , т.е. $\vec{OA}\left\{x;y\right\}$. Так как $\vec{OA}=OA∙\vec{OM}$, то $x=OA∙\cos(α), y=OA∙\sin(α)$.

1. **Теорема о площади треугольника.**
* Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. $S=\frac{1}{2}ab\sin(C)$**.**
1. **Теорема синусов.**
* Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. $\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}$ .

*Замечание:*$ \frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}=R$***,*** где ***R*** – радиус описанной окружности.

1. **Теорема косинусов (обобщенная теорема Пифагора).**
* Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними. $a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos(A)$.
1. **Понятие решение треугольника.**
* **Решением треугольника** называется нахождение всех его шести элементов (т.е. трех сторон и трех углов) по каким-нибудь трем элементам, определяющим треугольник.
1. **Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.**
* **Дано**: *a, b, ∠C*. Найти *c, ∠A, ∠B*.

**Решение:** 1. По теореме косинусов находим *с*. $c=\sqrt{a^{2}+b^{2}-2ab\cos(C)}$. 2. Пользуясь теоремой косинусов находим $\cos(A)=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$. Угол *А* находим с помощью таблицы или микрокалькулятора. 3. $∠B=180°-∠A-∠C$.

1. **Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.**
* **Дано:** *a, ∠B, ∠C*. Найти *∠A, b, c*.
* **Решение:** 1. $∠A=180°-∠B-∠C$. 2. С помощью теоремы синусов вычисляем *b* и *c*: $b=a\frac{\sin(B)}{\sin(A)}, c=a\frac{\sin(C)}{\sin(A)}$**.**
1. **Решение треугольника по трем сторонам.**
* **Дано:** *a, b* и *c*. Найти: *∠A, ∠B* и *∠C*.

**Решение:** 1. По теореме косинусов получаем: $\cos(A)=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$. Угол *A* находим с помощью таблицы или микрокалькулятора. 2. Аналогично находим угол *B*. $\cos(B)=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}$. 3. $∠C=180°-∠A-∠B$.

1. **Измерение высоты предмета.**

1)Требуется найти высоту *АН* какого-то предмета. Для этого отметим точку *В* на определенном расстоянии *а* от основания *Н* предмета и измерим угол *АВН*: *∠АВН=*$α$. По этим данным из прямоугольного треугольника *АНВ* находим высоту предмета ***AH=a·tg***$α$***.***

2)Если основание предмета недоступно: на прямой, проходящей через основание *Н* предмета, отметим две точки *В* и *С* на определенном расстоянии *а* друг от друга и измерим углы *АВН* и *АСВ*: *∠АВН =*$α$ и *∠АСВ=*$β$. Эти данные позволяют определить все элементы *∆АВС*, в частности *АВ.* Итак, *∠АВН* – внешний угол *∆АВС,* поэтому *∠А=*$α-β$. По теореме синусов, находим *АВ*: $AB=\frac{a\sin(β)}{\sin(\left(α-β\right))}$. Из прямоуг. *∆АВН* находим высоту *АН* предмета: $AH=AB∙\sin(α)$. Итак, $AH=\frac{a\sin(α)\sin(β)}{\sin(\left(α-β\right))}$. А

 $α$ $β$

 Н *а* В С

1. **Измерение расстояния до недоступной точки.**

Требуется найти расстояние *d* от пункта *А* до недоступного пункта *С*. Выберем точку *В* и измерим длину *с* отрезка *АВ*. Измерим, с помощью астролябии, углы *А* и *В*. *∠А=*$α$ и *∠В=*$β$. Эти данные позволяют решить *∆АВС* и найти искомое расстояние *d*=*АС*. Итак, $∠C=180°-α-β$, $\sin(C)=\sin(\left(180°-α-β\right)=\sin(\left(α+β\right)))$. По теореме синусов находим *d*. Так как $\frac{AC}{\sin(B)}=\frac{AB}{\sin(C)}, AC=d, AB=c, ∠B=β$, то $d=\frac{c\sin(β)}{\sin(\left(α+β\right))}$.

 С

 *d*

 $α$ $β$

 А *c* В

1. **Угол между векторами.**
* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два данных вектора. Отложим от произвольной точки *O* векторы $\vec{OA}=\vec{a}$ и $\vec{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи *OA* и *OB* образуют *∠AOB*. Градусную меру этого угла обозначим буквой $α$ и будем говорить, что **угол между векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **равен** $α$. Обозначается $\hat{\vec{a}\vec{b}}$.

 B

 $\vec{b}$

 $\vec{b}$ A $α$

 $\vec{a}$ $\vec{a}$ O

* Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0°.
1. **Определение перпендикулярных векторов.**
* **Два вектора** называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Обозначают $\vec{a}$ ⊥ $\vec{b}$.

 $\vec{a}$

 $\vec{b}$

1. **Скалярное произведение векторов.**
* **Скалярным произведением двух векторов** называется произведение их длин на косинус угла между ними. Обозначается $\vec{a}∙\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. $\vec{a}∙\vec{b}=\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|\cos(\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right))$
* **Скалярное произведение ненулевых векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **равно нулю** тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны. Т. е. $\vec{a}∙\vec{b}=0$, когда $\cos(\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right))$=0 след-но, $\hat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, поэтому $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.
* **Скалярное произведение ненулевых векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **положительно** тогда и только тогда, когда $\hat{\vec{a}\vec{b}}<90°$.
* **Скалярное произведение ненулевых векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **отрицательно** тогда и только тогда, когда $\hat{\vec{a}\vec{b}}>90°$.
1. **Определение скалярного квадрата.**
* Скалярное произведение $\vec{a}∙\vec{a}$ называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$. Обозначают $\vec{a}$2.
* Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. $\vec{a}∙\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^{2}$.
1. **Скалярное произведение двух векторов в координатах.**
* В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$ выражается формулой $\vec{a}∙\vec{b}=x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}$**.**

*Следствие 1:* Ненулевые векторы $\vec{a}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}=0$.

*Следствие 2:* Косинус угла $α$ между ненулевыми векторами $\vec{a}\left\{x\_{1};y\_{1}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x\_{2};y\_{2}\right\}$ выражается формулой $\cos(α)=\frac{x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}}{\sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}∙\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}}}$.

1. **Свойства скалярного произведения векторов.**
* Для любых векторов $\vec{a}\vec{, b, }\vec{c}$ и любого числа *k* справедливы соотношения:

**1°.** $\vec{a}^{2}\geq 0$**, причем** $\vec{a}^{2}>0$ **при** $\vec{a}\ne 0$**.**

**2°.** $\vec{a}∙\vec{b}=\vec{b}∙\vec{a}$ **(переместительный закон).**

**3°.** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)∙\vec{c}=\vec{a}∙\vec{c}+\vec{b}∙\vec{c}$ **(распределительный закон).**

**4°.** $\left(k\vec{a}\right)∙\vec{b}=k\left(\vec{a}∙\vec{b}\right)$ **(сочетательный закон).**

1. **Определение правильного многоугольника.**
* **Правильным многоугольником** называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.
* **Сумма всех углов правильного *n*-угольника** **равна** $\left(n-2\right)∙180°$**.**
* **Формула для вычисления угла** $α\_{n}$**.** $α\_{n}=\frac{n-2}{n}∙180°$.
1. **Окружность, описанная около правильного многоугольника.**
* **Окружность** называется **описанной около многоугольника**, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.
1. **Теорема об окружности, описанной около правильного многоугольника.**
* Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.
1. **Окружность, вписанная в правильный многоугольник.**
* **Окружность** называется **вписанной в многоугольник**, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.
1. **Теорема об окружности, вписанной в правильный многоугольник.**
* В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

*Следствие 1:* Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

*Следствие 2:* Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник. Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

1. **Формула для вычисления площади правильного многоугольника.**
* Пусть *S* – площадь правильного *n*-угольника,

*P* – периметр правильного *n*-угольника,

*r* – радиус вписанной окружности.

$$S=\frac{1}{2}Pr$$

1. **Формула для вычисления стороны правильного многоугольника.**

Пусть $a\_{n}$ – сторона правильного *n*-угольника,

*R* – радиус описанной окружности.

$$a\_{n}=2R\sin(\frac{180°}{n})$$

1. **Формула для вычисления радиуса вписанной окружности.**

Пусть *r* – радиус вписанной окружности,

*R* – радиус описанной окружности.

$$r=R\cos(\frac{180°}{n})$$

1. **Выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и шестиугольника.**

$$a\_{3}=R\sqrt{3}, a\_{4}=R\sqrt{2}, a\_{6}=R $$

1. **Значение длины окружности.**
* **Точное значение длины окружности** – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.
1. **Формула для вычисления длины окружности.**
* Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число принято обозначать греч. буквой π. $\frac{C}{d}=\frac{C}{2R}=π$, отсюда получаем формулу для вычисления длины окр-ти

 $C=2πR$.

1. **Формула для вычисления длины дуги окружности.**
* Длина *l* дуги окружности с градусной мерой $α$ выражается формулой:

 $l=\frac{πR}{180°}∙α$.

1. **Формула для вычисления площади круга.**
* **Кругом** называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Площадь *S* круга радиуса *R* выражается формулой:

$S=πR^{2}$.

1. **Формула для вычисления площади кругового сектора.**
* **Круговым сектором** называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.
* Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**.
* Площадь *S* кругового сектора радиуса *R*, ограниченного дугой с градусной мерой $α$ выражается формулой:

 $ S=\frac{πR^{2}}{360°}∙α$.

1. **Формула для вычисления площади кругового сегмента.**
* **Круговым сегментом** называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги.
* Площадь *S* кругового сегмента выражается формулой:

$S=\frac{1}{2}R^{2}\left(\frac{πα}{180°}-\sin(α)\right)$,

где *R* – радиус круга, $α$ – угол сегмента, $π≈3,14$.

1. **Задача о квадратуре круга.**
* Построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

В конце 19 века было доказано, что такое построение **невозможно**.

1. **Отображение плоскости на себя.**
* Когда каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая-то точка этой же плоскости, причем любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке, говорят, что дано **отображение плоскости на себя**.
* Осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.
* Центральная симметрия плоскости представляет собой отображение плоскости на себя.
1. **Понятие движения.**
* **Осевая симметрия** обладает важным свойством – **это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками**.

Любое отображение, обладающее этим свойством, называется **движением (или перемещением)**.

* **Движение плоскости** – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние.

**Центральная симметрия плоскости также является движением.**

1. **Теорема об отрезке при движении.**
* При движении отрезок отображается на отрезок.

*Следствие:* При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

1. **Понятие наложения.**
* **Наложение** – это отображение плоскости на себя, которое обладает свойствами, выраженными в аксиомах.
* **Аксиомы о свойствах наложений**:

(**Понятие равенства фигур:** Если существует наложение, при котором фигура *Ф* отображается на фигуру *Ф1*, то говорят, что фигуру *Ф* можно совместить наложением с фигурой *Ф1*, или фигура *Ф* равна фигуре *Ф1*).

**1°.**Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

**2°.**На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

**3°.**От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

**4°.**Любой угол *hk* можно совместить наложением с равным ему углом *h1k1* двумя способами: 1) так, что луч *h* совместится с лучом *h1*, а луч *k* – с лучом *k1*; 2) так, что луч *h* совместится с лучом *k1*, а луч *k* – с лучом *h1.*

**5°.**Любая фигура равна самой себе.

**6°.**Если фигура *Ф* равна фигуре *Ф1*, то фигура *Ф1* равна фигуре *Ф*.

**7°.** Если фигура *Ф1* равна фигуре *Ф2*, а фигура *Ф2* равна фигуре *Ф3*, то фигура *Ф1* равна фигуре *Ф3*.

* При наложении различные точки отображаются в различные точки.
* Любое наложение является движением плоскости.
* Любое движение является наложением.
* При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.
1. **Понятие параллельного переноса.**
* Пусть $\vec{a}$ – данный вектор.

**Параллельным переносом на вектор** $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка *М* отображается в такую точку *М1*, что вектор $\vec{MM\_{1}}$ равен вектору $\vec{a}$. $\vec{a}$ М1

* **Параллельный перенос является движением**.

 М

1. **Понятие поворота.**
* Пусть *О* – точка плоскости (центр поворота). Зададим угол α (угол поворота).

**Поворотом плоскости вокруг точки *О* на угол α** называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка *М* отображается в такую точку *М1*, что *ОМ=ОМ1* и *∠МОМ1* равен α.

При этом точка *О* остается на месте, т. е. отображается сама в себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки *О* в одном и том же направлении – по часовой стрелке или против часовой стрелки.

 М1 М

 α

 О

* **Поворот является движением.**
1. **Некоторые определения предмета стереометрии.**
* **Стереометрия** – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

В стереометрии рассматриваются геометрические тела и их поверхности.

* **Геометрическое тело** – часть пространства, отделенная от остальной части пространства поверхностью – **границей** этого тела.
* Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью** этого тела.
* Фигура, которая образуется при пересечении тела с секущей плоскостью, называется **сечением тела**.

**Некоторые геометрические тела**:

 Куб Цилиндр Конус Шар Пирамида

1. **Определение многогранника.**
* **Многогранник** – это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. Например: **прямоугольный параллелепипед, куб, тетраэдр, октаэдр**.
* Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. Никакие две соседние грани не лежат в одной плоскости.
* Стороны граней называются – **ребрами**, а концы ребер – **вершинами многогранника**.
* Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю многогранника**.
* Многогранники бывают выпуклыми и невыпуклыми.

**Выпуклый многогранник** расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

**Невыпуклый многогранник** расположен по разные стороны от плоскости каждой своей грани.

1. **Определение призмы.**
* ***N* – угольной призмой** называется многогранник $A\_{1}A\_{2}…A\_{n}B\_{1}B\_{2}…B\_{n}$, составленный из двух равных *n* – угольников $A\_{1}A\_{2}…A\_{n}$ и $B\_{1}B\_{2}…B\_{n}$ – **оснований призмы** и *n* параллелограммов $A\_{1}A\_{2}B\_{2}B\_{1}$, …, $A\_{n}A\_{1}B\_{1}B\_{n}$ – **боковых граней призмы**. Bn B5

 B1 B4

 B2 B3

 А1 Аn A4

 А2 А3

1. **Понятие перпендикулярности прямой и плоскости.**
* **Прямая *а***, пересекающая плоскость α в некоторой точке *Н*, называется **перпендикулярной к этой плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку *Н*. Обозначается а⊥α.
1. **Определение прямой, наклонной и правильной призмы.**
* Если все боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскостям ее оснований, то призма называется **прямой**.
* В противном случае призма называется **наклонной**.
* Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной**.
* Прямая перпендикулярная плоскостям оснований призмы называется **высотой призмы**.
1. **Определение параллелепипеда.**
* Четырехугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом**. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы.
1. **Определение прямого параллелепипеда.**
* Параллелепипед называется **прямым**, если его боковые ребра перпендикулярны к плоскостям оснований. Боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники.
1. **Определение прямоугольного параллелепипеда.**
* Если основания прямого параллелепипеда прямоугольники, то этот параллелепипед называется **прямоугольным**.
1. **Свойства диагоналей параллелепипеда.**
* Четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
1. **Понятие объема тела.**
* За единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Обозначается буквой *V.*

Куб с ребром 1 см. называется **кубическим сантиметром**. Обозн.: 1 см3.

Куб с ребром 1 м. называется **кубическим метром**. Обозн.: 1 м3.

Куб с ребром 1 мм. называется **кубическим миллиметром**. Обозн: 1 мм3.

1. **Основные свойства объемов.**

1°. Равные тела имеют равные объемы.

2°. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

1. **Принцип Кавальери.**
* Рассмотрим два тела, заключенные между двумя параллельными плоскостями α1 и α2. Любая плоскость, расположенная между плоскостями α1 и α2 и параллельная им, пересекает оба тела так, что площадь сечения первого тела в *k* раз больше площади сечения второго тела, $S\_{1}=kS\_{2}$, число *k* одно и то же для любой такой секущей плоскости. По принципу Кавальери: **объем первого тела в *k* раз больше объема второго тела,** $V\_{1}=kV\_{2}$**.**

 α1

 S1 S2

 α2

1. **Свойства прямоугольного параллелепипеда.**
* Длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда называют **измерениями прямоугольного параллелепипеда.**

Пусть*a, b, c* – измерения прямоугольного параллелепипеда.

1°. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. $d^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}$.

2°. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. $V=abc$.

3°. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. $V=S\_{осн}h$.

1. **Формула объема призмы.**
* Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

 $V=S\_{осн}h$.

1. **Определение пирамиды.**
* Рассмотрим многоугольник $A\_{1}A\_{2}…A\_{n}$ и точку *Р*, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку *Р* отрезками с вершинами многоугольника, получим *n* треугольников $PA\_{1}A\_{2},PA\_{2}A\_{3},…,PA\_{n}A\_{1}$. Многогранник, составленный из *n-*угольника $A\_{1}A\_{2}…A\_{n}$ и этих треугольников, называется **пирамидой**.

 P

 An A4

 A1 A3

A2

Многоугольник $A\_{1}A\_{2}…A\_{n}$ называется **основанием пирамиды**, а треугольники $PA\_{1}A\_{2},PA\_{2}A\_{3},…,PA\_{n}A\_{1}$- **боковыми гранями пирамиды**.

Точка *Р* называется **вершиной пирамиды**, а отрезки $PA\_{1},PA\_{2},…,PA\_{n}$ – **боковыми ребрами**.

* Треугольную пирамиду называют **тетраэдром**.
* Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью ее основания и перпендикулярный к этой плоскости, называется **высотой пирамиды**.
1. **Определение правильной пирамиды.**
* Пирамида называется **правильной**, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.
1. **Определение апофемы пирамиды.**
* Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой**.
* Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.
1. **Формула объема пирамиды.**
* Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту. $V=\frac{1}{3}S\_{осн}∙h$ .
1. **Определение цилиндра.**
* Возьмем прямоугольник *ABCD* и будем вращать его вокруг одной из сторон, например вокруг стороны *АВ*. В результате получится тело, которое называется **цилиндром**.

Прямая *АВ* называется **осью цилиндра**, а отрезок *АВ* – его **высотой**.

При вращении сторон *AD* и *BC* образуются два равных круга – они называются **основаниями цилиндра,** а их радиус называется **радиусом цилиндра**.

При вращении стороны *CD* образуется поверхность, состоящая из отрезков, параллельных оси цилиндра. Ее называют **цилиндрической поверхностью** или **боковой поверхностью цилиндра**, а отрезки, из которых она составлена – **образующими цилиндра**.

* **Цилиндр** – это тело, ограниченное двумя равными кругами и цилиндрической поверхностью.

 B C

 A D

1. **Формула объема цилиндра.**
* Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

 $V=S\_{осн}h=πr^{2}h$.

1. **Формула площади боковой поверхности цилиндра.**
* Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади ее развертки.

 $S\_{бок}=2πrh$.

1. **Определение конуса.**
* Возьмем прямоугольный треугольник *АВС* и будем вращать его вокруг катета *АВ*. В результате получится тело, которое называется **конусом**.

Прямая *АВ* называется **осью конуса**, а отрезок *АВ* – его **высотой**.

При вращении катета *ВС* образуется круг, он называется **основанием конуса**.

При вращении гипотенузы *АС* образуется поверхность, состоящая из отрезков с общим концом *А*. Ее называют **конической поверхностью** или **боковой поверхностью конуса**, а отрезки, из которых она составлена – **образующими конуса**.

* **Конус** – это тело, ограниченное кругом и конической поверхностью.

А

 В С

1. **Формула объема конуса.**
* Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту. $ V=\frac{1}{3}S\_{осн}h=\frac{1}{3}πr^{2}h$.
1. **Формула площади боковой поверхности конуса.**
* Площадь боковой поверхности конуса равна площади ее развертки.

$S\_{бок}=\frac{πl^{2}}{360°}α$ или $S\_{бок}=πrl$,

где $α$ – градусная мера дуги сектора, *l* – образующая, *r* – радиус основания.

1. **Определение сферы.**
* **Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка называется **центром сферы**, а данное расстояние **– радиус сферы.**

Сфера образуется в результате вращения полуокружности.

* Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется **диаметром сферы**. $D=2R$.
1. **Определение шара.**
* Тело, ограниченное сферой. называется **шаром**.
* Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шар образуется вращением полукруга вокруг его диаметра.

Шар радиуса *R* с центром *О* содержит все точки пространства, расположенные от точки *О* на расстоянии, не превышающем *R*, и не содержит других точек.

 O R

1. **Формула объема шара.**
* Объем шара радиуса *R* равен $V=\frac{4}{3}πR^{3}$.
1. **Формула площади сферы.**
* Площадь сферы радиуса *R* вычисляется по формуле $S=4πR^{2}$.