

Всероссийский педагогический журнал

«Современный урок»

Всероссийский конкурс

«Творческий учитель-2023»

Сефибеков Сефибек Рамазанович

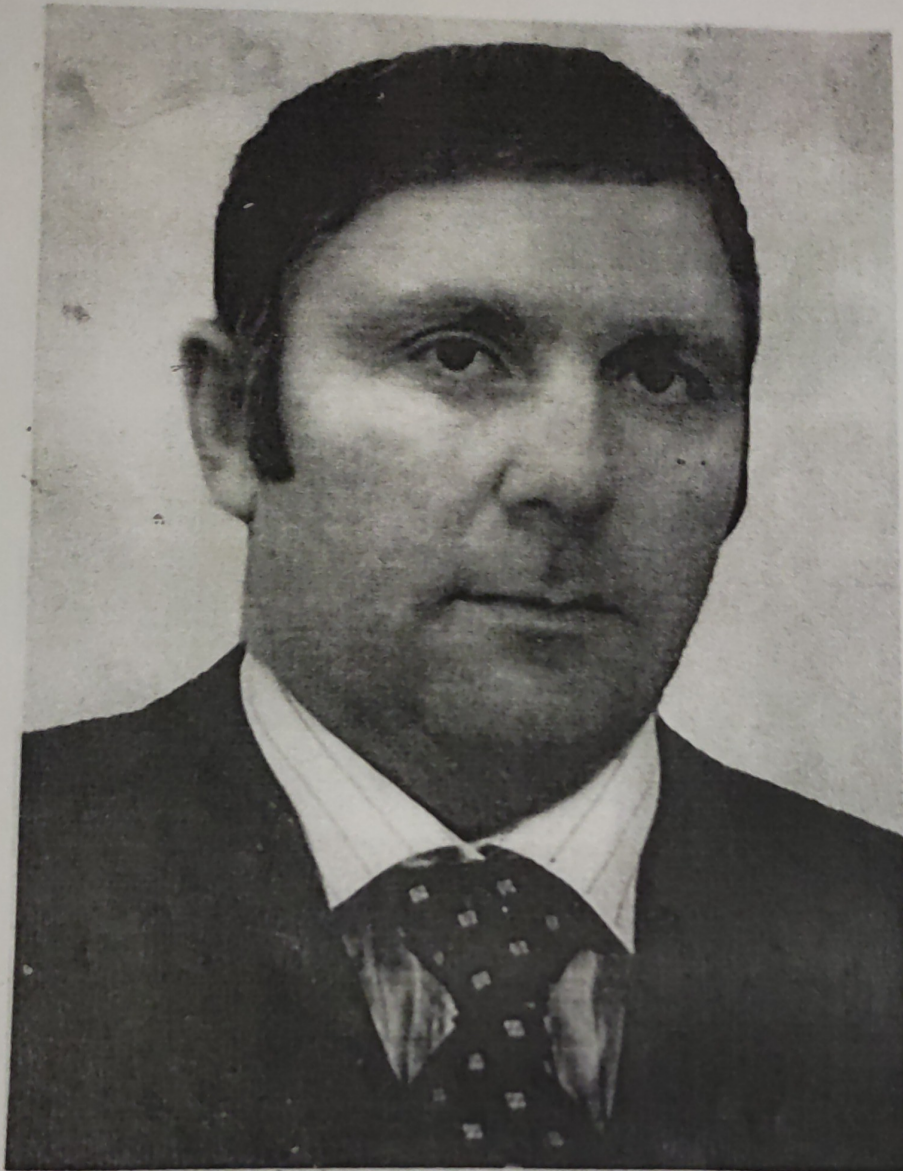
**ЭКСКУРСИЯ В ГЕОМЕТРИЮ. ДВЕ
ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ**

(Элективный курс)

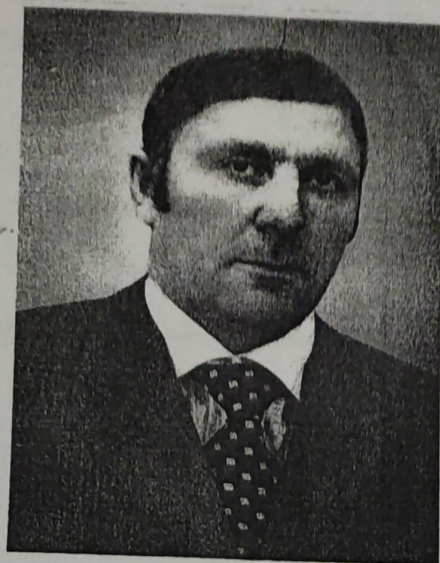
Дагестан-Кашкент

2023





**Сефибек Рамазанович
Сефибеков**



Сефибеков

Сефибек Рамазанович

Почетный работник общего образования РФ,
Заслуженный учитель Республики Дагестан,
Учитель высшей категории,
Кандидат педагогических наук,
МКОУ «Кашкентская СОШ» Хивского района
Республики Дагестан.

Автор более **150** научных и методических работ,
регулярно публикуются в журналах «Квант», «Математика в
школе», «Математика»

Научные работы автора посвящены исследовательской
деятельности школьников в урочной и внеурочной деятельности
по математике на основе авторских элективных разработок
«За страницами школьного учебника».

Экскурсия в геометрию. Две исторические задачи

С.Р.Сефибеков, с. Кашкент, Хивский район, Республика Дагестан

В нашем изложении мы будем воспользоваться следующим приемом. Допустим, что мы должны доказать предложение: $A_n = B_n$ (1)

Перейдем равносильными преобразованиями к его следствию:

$$A_{n-1} = B_{n-1} \quad (2)$$

$$A_{n-2} = B_{n-2} \quad (3)$$

.....

$$A_1 = B_1 \quad (n)$$

Если следствие (n) верно, то верны и обратные переходы:

$$(n) \Leftrightarrow (n-1) \Leftrightarrow (n-2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$$

Этим приемом доказательства математического объекта следует воспользоваться, когда нам не удастся провести прямое доказательство.

Рассмотрим примеры двух задач.

1. В дугу АВ вписана ломанная АМВ из двух отрезков АМ и МВ ($AM > MB$).

Докажите, что основание перпендикуляра КН, опущенного из середины К дуги АВ на отрезок АМ, делит ломанную пополам: $АН = НМ + МВ$ (задача Архимеда).

Решение. Пусть верно равенство:

$$АН = НМ + МВ. \quad (1)$$

Выполним следующие построения. Достроим дугу до окружности с центром О, проведем радиусы ОА, ОК, ОМ, ОВ и серединные перпендикуляры ОЕ и ОР соответственно к хордам АМ и МВ (рис. 1; С и D – точки их пересечения с окружностью). Тогда $ОК \perp АВ$. Из условия $АН - НМ = МВ$. С другой стороны, $АН + НМ = АМ$. Из этих равенств

$$АН = \frac{1}{2} АМ + \frac{1}{2} МВ \text{ или}$$

$$AH = AE + MP. \quad (2)$$

Далее, $AH = AE + EH. \quad (3)$

Из равенств (2) и (3) имеем:

$$EH = MP. \quad (4)$$

Нам остается доказать равенство (4) – следствие равенства (1).

$\angle HKO = \angle MAB = \angle COK$, как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Но $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup MB = \cup MD$, $\angle COK = \cup CK$ и поэтому $\cup CK = \cup MD$. Отсюда равны и хорды CK и MD , а также и треугольники COK и MOD по трем сторонам. Проведя в треугольнике COK высоту KE_1 ($KE_1 = EH$, т.к. EE_1KH – прямоугольник), заключаем, что $KE_1 = MP$, т.е. $EH = MP$.

Таким образом, из верности равенства (4) и следует верность равенства (1).

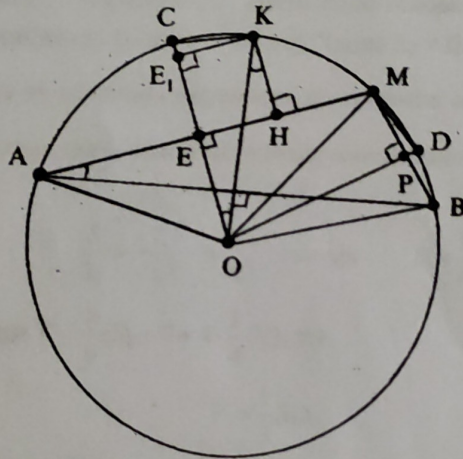


Рис. 1

2. Пусть T – геометрическое тело ($T \in \{\text{призма, цилиндр, пирамида, усеченная пирамида, конус, усеченный конус, шар}\}$) с параллельными основаниями, S_1 и S_2 – площади оснований, S – площадь

среднего* сечения плоскостью, параллельной основаниям, h – высота, V – объем. Тогда:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S). \quad (1)$$

(формула Ньютона-Симпсона).

Решение. Пусть верно равенство (1).

1. Если T – призма, то $S_1 = S_2 = S$ и $V = \frac{h}{6}(S + S + 4S)$, $V = \frac{h}{6} \cdot 6S$,

т.е. $V = Sh$. (2)

Равенство (2) верно, тогда верно и равенство (1).

2. Если T – цилиндр, то доказательство аналогично случаю призмы.

3. Если T – пирамида, то имеем одно основание (нижнее), а верхнего основания нет (оно есть точка). Тогда $S_2 = 0$. Выразим S через S_1 .

Расстояние от вершины пирамиды до среднего сечения будет $\frac{h}{2}$. Так

как отсеченная пирамида и данная пирамида подобны, то:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{h^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{откуда} \quad S = \frac{1}{4}S_1.$$

Отсюда $V = \frac{h}{6}(S_1 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{4}S_1)$, т.е.

$$V = \frac{1}{3}S_1h. \quad (3)$$

Равенство (3) верно, поэтому верно и равенство (1).

4. Если T – конус, то доказательство аналогично случаю пирамиды.

5. Пусть T – произвольная усеченная пирамида (рис. 2). Достроим ее до полной пирамиды. Пусть верхнее основание усеченной пирамиды отстоит от вершины полной пирамиды на расстоянии X .

* средним сечением тела называется сечение тела плоскостью, проходящей через середину его высоты.

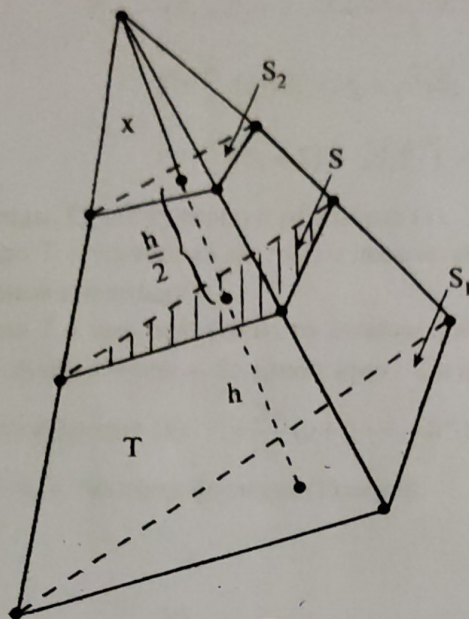


Рис. 2

Выразим S через S_1 и S_2 . Для этого рассмотрим пирамиды с высотами X , $X + \frac{h}{2}$ и $X + h$. Так как эти пирамиды подобны, то имеем:

$$\begin{cases} \frac{(X + \frac{h}{2})^2}{X^2} = \frac{S}{S_2} \\ \frac{(X + h)^2}{X^2} = \frac{S_1}{S_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{h}{2X} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_2}} \\ 1 + \frac{h}{X} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{S_2}}{2(\sqrt{S} - \sqrt{S_2})} h \\ X = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{2(\sqrt{S} - \sqrt{S_2})} h = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} h,$$

$$\frac{1}{2(\sqrt{S} - \sqrt{S_2})} = \frac{1}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}},$$

$$2(\sqrt{S} - \sqrt{S_2}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_2},$$

$$2\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2},$$

откуда:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}}{4}, \quad (4)$$

Из равенств (1) и (4) имеем:

$$V = \frac{h}{6} \cdot (S_1 + S_2 + 4 \cdot \frac{S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}}{4}),$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot (2 \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})), \quad \text{откуда}$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) - \text{что верно для усеченной пирамиды. Поэтому верно и равенство (1).}$$

6. Если T – усеченный конус, то доказательство аналогично случаю усеченной пирамиды.

7. Если T – шар радиуса R , то нижнее и верхнее основания его – точки, а среднее сечение – большой круг. Тогда $S_1 = S_2 = 0$, $S = \pi R^2$, $h = 2R$ и по формуле (1): $V = \frac{2R}{6} (0 + 0 + 4 \cdot \pi R^2)$, откуда $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ что верно для шара. Поэтому формула (1) верна.

Мы решили задачу 2° , сведя ее к следствиям, верность которых нам была известна. А если следствия нам не известны, то как быть? В этом случае дадим вывод искомой формулы с помощью **ИНТЕРПРЕТАЦИИ**.

Прежде заметим, что все основные тела, рассматриваемые в элементарной геометрии, относятся к классу тел с квадратичным законом изменения площади поперечного сечения.

Возьмем тело T с параллельными основаниями и высотой h (рис. 3). Направим ось x по высоте h (начало оси x – точка O лежит в нижнем основании) и рассмотрим площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, параллельной основаниям. Тогда $S(x)$ есть функция на отрезке $x \in [0; h]$. Предположим, что $S(x)$ изменяется по квадратичному закону, т.е. явля-

ется многочленом от x : : второй степени:

$$S(x) = ax^2 + bx + c \quad (0 \leq x \leq h).$$

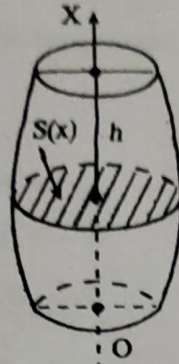


Рис. 3

Пусть V — объем тела T . Тогда

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x) dx = \int_0^h (ax^2 + bx + c) dx = \\ &= \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_0^h, \end{aligned}$$

откуда :

$$V = a \frac{h^3}{3} + b \frac{h^2}{2} + ch. \quad (1)$$

Таким образом, чтобы найти объем V тела T , достаточно найти три коэффициента a , b и c в формуле (6). А для этого достаточно знать $S(x)$ при трех значениях x . Чаще всего берут $x = 0$, $x = \frac{h}{2}$ и $x = h$, так что $S(0)$ и $S(h)$ — это площади "конечных" сечений тела T , $S(\frac{h}{2})$ — пло-

щадь "среднего сечения.

Введем обозначения $S(0) = S_1$, $S(h) = S_2$ и $S(\frac{h}{2}) = S$. Тогда относительно параметров a , b и c имеем систему трех уравнений ($S(x) = ax^2 + bx + c$):

$$\begin{cases} c = S_1, \\ c + bh + ah^2 = S_2, \\ c + b\frac{h}{2} + a(\frac{h}{2})^2 = S \end{cases} \quad \text{откуда}$$
$$\begin{cases} a = \frac{2S_1 + 2S_2 - 4S}{h^2}, \\ b = \frac{4S - 3S_1 - S_2}{h}, \\ c = S_1. \end{cases} \quad (2)$$

Подставив соотношения (2) в равенство (1), получим окончательно:

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S) - \text{искомая формула Ньютона-Симпсона.}$$

на-Симпсона.

Попутно отметим, что вывод формул объемов геометрических тел можно изящно осуществить по формуле Ньютона-Симпсона (см. решение задачи 2).

Литература

Сефибеков С.Р. Несколько вопросов геометрии.- Н. Новгород: издательство нижегородского института экономического развития, 1999