Методическая разработка для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ОСНОВА ДЛЯ ВЫВОДА-ЛОГИЧЕСКОЕ РАССУЖДЕНИЕ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

(современные образовательные технологии-элективный курс)

От автора

Начальное изучение геометрии окажется продуктивным и творческим только в том случае, если учащиеся с первых же шагов будут применять полученные ими знания к решению задач , углубляя понимание определений ,аксиом и теорем, которые, вообще говоря ,сначала кажутся им трудными и непонятными .

Сказанное особенно относится к 7 классу. Именно там в первую очередь следует заняться простейшими упражнениями на доказательство (и построение). Не следует смущаться кажущейся трудностью таких задач: опыт показывает, что они легче, интереснее и полезнее искусственно скомбинированных задач на вычисление. Надо настойчиво приучать начинающих к точному чертежу и простейшим логическими навыкам, требуя от них отчетливого выяснения всех шагов логического доказательства. Тогда на примерах простейших умозаключений, выполненных самим учащимися, он легче поймет смысл слова « д о к а з а т ь», чем если прослушает самое детальное разъяснение этого слова.

В стабильных учебниках, особенно в первых его параграфах, почти нет легких задач геометрического содержания. Поэтому предлагаю вниманию учительства некоторое число геометрических задач на доказательство.

12.01.22г. **С. Сефибеков.**

ОСНОВА ДЛЯ ВЫВОДА — ЛОГИЧЕСКОЕ РАССУЖДЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

Учебный предмет «геометрия» в школе изучается с 7 класса. Многие учителя на практике наблюдают, что на начальных этапах изучения геометрии учащиеся при решении той или иной задачи часто делают выводы, непосредственно опираясь на чертёж. Но чертёж к геометрической задаче не служит основанием для вывода, основа для вывода — логическое рассуждение.

Для разрешения вопросов геометрии чертежи имеют вспомогательное значение. Они часто дают возможность догадаться, какими свойствами обладают геометрические фигуры. Но чтобы убедиться в справедливости этих свойств для всех фигур определённого вида, необходимы логические рассуждения — доказательства.

Доказательство в обучении учащихся — это логическое действие, в процессе которого обосновывается истинность суждения.

В основе доказательства лежит метод. Метод — в самом общем значении — способ достижения цели; совокупность определённых правил, приёмов, норм познания и действия.

Правила в геометрии — это аксиомы, определения и теоремы. Поэтому на них и следует опираться при решении поставленной геометрической задачи, а не делать выводы непосредственно из чертежа!

В данной статье мы рассмотрим 13 задач для учащихся 7, 9 классов, решаемые методом доказательства от противного. Учителя могут не только предложить учащимися именно эти задачи, но и составить аналогичные.

Прежде всего выясним, в чём состоит метод доказательства от противного.

Пусть X — условие теоремы, то есть то, что предполагается данным, а Y — её заключение, то есть то, что требуется доказать. Тогда теорема схематически записывается в виде $X \to Y$ и читается так: «из X следует Y».

Метод доказательства от противного теоремы $X \to Y$ состоит в следующем. Предполагается противное (противоречивое) искомому Y положение $\overline{Y}$. Если на основании сделанного предположения $\overline{Y}$ и условия X удаётся получить некоторое неверное утверждение (противоречащее известным аксиомам, определениям, теоремам), то положение $\overline{Y}$ не имеет места, то есть справедливо Y и, тем самым, теорема $X \to Y$ доказана.

Задача 1. Могут ли две стороны треугольника быть параллельными?

Ответ. Не могут.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC (*рис. 1*) стороны AB и AC параллельны.

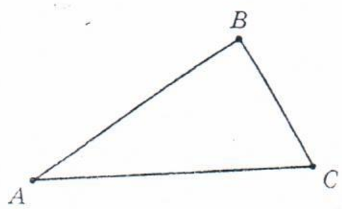

Рис. 1

Построим прямые AB, AC и BC (*рис. 2*).

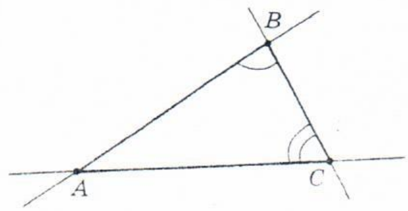

Рис. 2

Тогда для параллельных прямых AB и AC прямая BC — секущая и сумма внутренних односторонних углов B и C равна 180°:

$$\angle B + \angle C = 180°.$$

Получили противоречие, поскольку сумма углов треугольника ABC равна 180°:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Значит, две стороны треугольника не могут быть параллельны.

Задача 2. Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными третьей стороне?

Ответ. Не могут.

Доказательство аналогично доказательству в задаче 1.

Задача 3. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два остроугольных треугольника?

Ответ. Нельзя.

Доказательство

Пусть треугольник ABC отрезком BD разрезан на два остроугольных треугольника ABD и CBD (*рис. 3*).

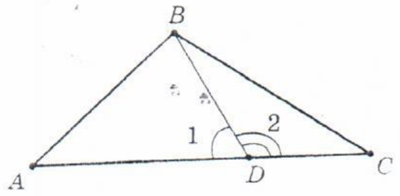

Рис. 3

Обозначим смежные углы при вершине D цифрами 1 и 2. По допущению

$$\angle 1 < 90^\circ \text{ и } \angle 2 < 90^\circ.$$

Тогда $\angle 1 + \angle 2 < 180^\circ$.

Получили противоречие с теоремой о смежных углах: сумма смежных углов равна 180°.

Значит, какой-нибудь треугольник разрезать на два остроугольных треугольника нельзя.

Задача 4. Может ли треугольник иметь два прямых внешних угла?

Ответ. Не может.

Доказательство

Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — внешние углы треугольника ABC и $\angle 1 = 90^\circ$, $\angle 2 = 90^\circ$ (*рис. 4*).

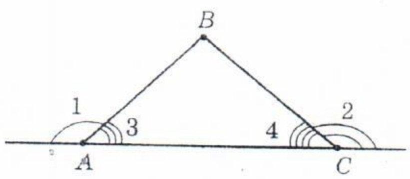

Рис. 4

Тогда внутренние углы 3 и 4 треугольника, смежные с углами 1 и 2 соответственно, также будут прямыми:

$$\angle 3 = 90^\circ,\ \angle 4 = 90^\circ \text{ и } \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$$

Получили противоречие с теоремой о сумме углов треугольника, по которой

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle B = 180^\circ.$$

Значит, треугольник не может иметь два прямых внешних угла.

Задача 5. Может ли против тупого угла треугольника лежать меньшая сторона этого треугольника?

Ответ. Не может.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC угол BAC — тупой и $BC < AB$ (*рис. 5*).

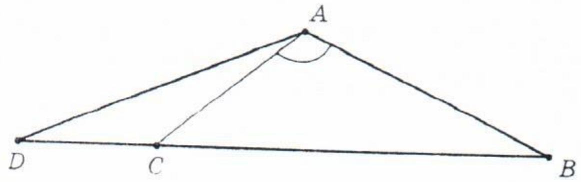

Рис. 5

На продолжении стороны BC за точку C выберем точку D так, чтобы длина BD «равнялась» длине BA.

Тогда треугольник ABD — равнобедренный и $\angle BDA = \angle BAD$ (как углы при основании AD), что неверно! Действительно, $\angle BAD > \angle BAC$, и поскольку угол BAC тупой, то и угол BAD тупой. Отсюда: угол BDA острый, поскольку в треугольнике ABD не может быть двух тупых углов! Следовательно, острый угол BDA не может быть равен тупому углу BAD! Пришли к противоречию, на основании которого делаем вывод.

Задача 6. В равнобедренном треугольнике ABC на продолжении основания BC за точку C взята точка D (*рис. 6*). Сравните углы ABC и ADC.

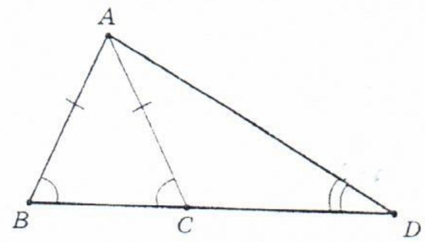

Рис. 6

Ответ. $\angle ABC > \angle ADC$.

Доказательство

Пусть $\angle ABC \le \angle ADC$. Из условия следует, что $\angle ABC = \angle ACB$ (так как треугольник ABC равнобедренный с основанием BC). Тогда получаем, что и $\angle ACB \le \angle ADC$, то есть, что внешний угол ACB треугольника ADC не больше его внутреннего угла, не смежного с ним. Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Значит, $\angle ABC > \angle ADC$.

Задача 7. Могут ли две биссектрисы одного и того же треугольника быть взаимно перпендикулярны?

Ответ. Не могут.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 перпендикулярны и пересекаются в точке O (*рис. 7*).

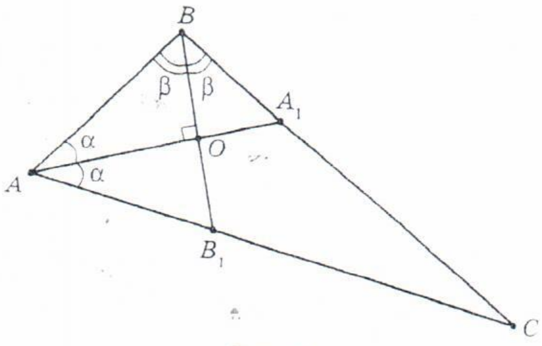

Рис. 7

Пусть

$$\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \alpha,$$

$$\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = \beta.$$

Из прямоугольного треугольника AOB ($\angle O = 90°$) имеем: $\alpha + \beta = 90°$ (как сумма острых углов). Но

$$\angle BAC = 2\alpha, \quad \angle ABC = 2\beta$$

и

$$\angle BAC + \angle ABC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90° = 180°,$$

то есть получили, что сумма двух углов треугольника равна 180°. Это противоречит теореме о сумме углов треугольника. Значит, две биссектрисы одного треугольника не могут быть взаимно перпендикулярны.

Задача 8. В треугольнике ABC стороны AB и AC не равны (*рис. 8*). Может ли медиана AM треугольника являться и его высотой?

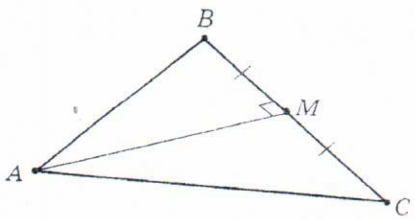

Рис. 8

Ответ. Не может.

Доказательство

Пусть медиана AM треугольника ABC является и его высотой. Поскольку из условия следует, что

$$BM = CM,$$

то прямоугольные треугольники ABM и ACM равны по двум катетам (AM — общий катет). Отсюда равны и их гипотенузы: $AB = AC$, что противоречит условию (ведь $AB \neq AC$!). Значит, медиана треугольника быть его высотой не может.

Задача 9. Может ли только одно основание высоты быть расположено на продолжении стороны треугольника?

Ответ. Не может.

Доказательство

Пусть только основание высоты BB_1 треугольника ABC — точка B_1 расположена на продолжении стороны AC (*рис. 9*).

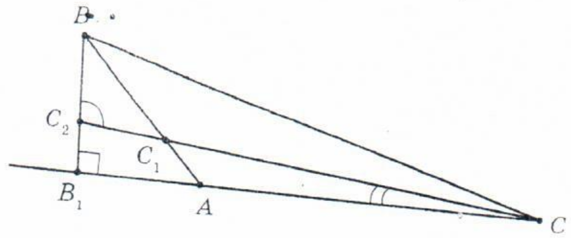

Рис. 9

Пусть CC_1 — высота треугольника, проведённая к стороне AB. Продолжение высоты CC_1 пересекает высоту BB_1 в точке C_2. Тогда $\angle BC_1C = 90°$. $\angle BC_1C$ — внешний угол треугольника BC_1C_2 и $\angle BC_2C_1 < \angle BC_1C$ (угол BC_2C_1 — внутренний угол треугольника BC_1C_2, не смежный с углом BC_1C). Поэтому угол BC_2C_1 острый.

С другой стороны, $\angle BC_2C_1$ — внешний угол треугольника CB_1C_2. Тогда

$$\angle BC_2C_1 > \angle C_2B_1C$$

(угол C_2B_1C — внутренний угол треугольника CB_1C_2, не смежный с углом BC_2C_1), то есть

$$\angle BC_2C_1 > 90° \; (\angle C_2B_1C = 90°),$$

значит, угол BC_2C_1 тупой.

Получили противоречие: один и тот же угол BC_2C_1 оказался и острым, и тупым! Значит, только одно основание высоты не может быть расположено на продолжении стороны треугольника.

Задача 10. Могут ли все основания высот треугольника быть расположенными на продолжениях сторон?

Ответ. Не могут.

Доказательство

Пусть основания высот AA_1, BB_1, CC_1 — точки A_1, B_1, C_1 расположены на продолжениях сторон треугольника (*рис. 10*).

Тогда

$$\angle AA_1B = \angle BB_1A = \angle CC_1A = 90°.$$

Для прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 угол BAC является внешним углом. Поэтому

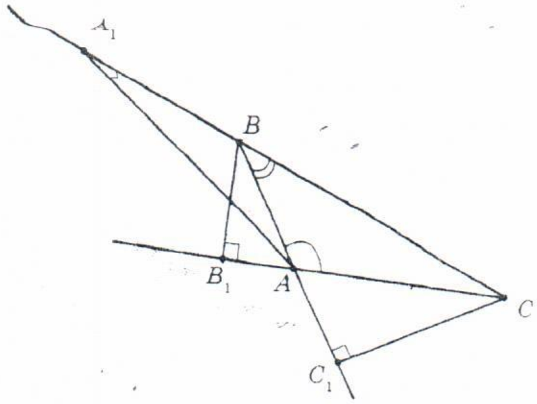

Рис. 10

$$\angle BAC = \angle BB_1A + \angle B_1BA = 90^\circ + \angle B_1BA,$$

или

$$\angle BAC = \angle CC_1A + \angle C_1CA = 90^\circ + \angle C_1CA.$$

Значит, угол BAC тупой.

Угол ABC — внешний угол треугольника ABA_1, тогда

$$\angle ABC = \angle AA_1B + \angle A_1AB = 90^\circ + \angle A_1AB.$$

Значит, угол ABC тупой. Получили противоречие: в треугольнике ABC два тупых угла! Таким образом, все основания высот треугольника не могут быть расположены на продолжениях сторон.

Задача 11. Верно ли, что если медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный?

Ответ. Верно.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC BD — медиана и биссектриса, и треугольник не является равнобедренным ($AB \neq CB$). Тогда одна из сторон AB и CB больше другой. Допустим, что $AB > CB$ (*рис. 11*).

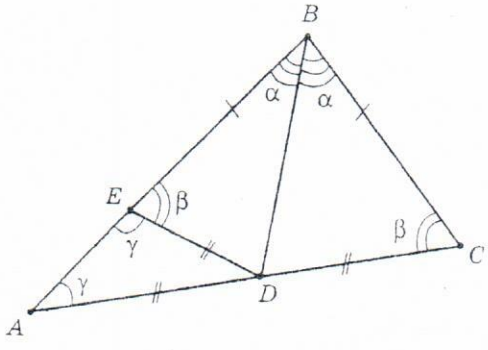

Рис. 11

Введём обозначения:

$$\angle A = \gamma, \ \angle B = 2\alpha, \ \angle C = \beta.$$

Отложим на стороне AB $EB = CB$ и соединим точки D и E. Тогда $\Delta EBD = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними (BD — общая сторона). Отсюда $DE = DC$; $\angle BED = \angle C$, то есть $\angle BED = \beta$.

Треугольник ADE оказался равнобедренным: $AD = ED$ ($AD = CD$, так как BD — медиана). Отсюда $\angle DEA = \angle A = \gamma$. Значит, развёрнутый угол AEB состоит из углов β и γ, то есть $\beta + \gamma = 180^\circ$. Получили, что сумма двух углов треугольника ABC равна 180°:

$$\beta + \gamma = \angle C + \angle A = 180^\circ,$$

что противоречит теореме о сумме углов треугольника. Значит, если медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

В заключение рассмотрим две задачи на вписанный угол. Тема «Вписанные углы» изучается в курсе геометрии 9 класса. В частности, девятиклассники знают, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

Задача 12. На окружности с центром O и диаметром AB отмечена произвольная точка C (*рис. 12*). Верно ли, что в треугольнике ABC угол C — прямой?

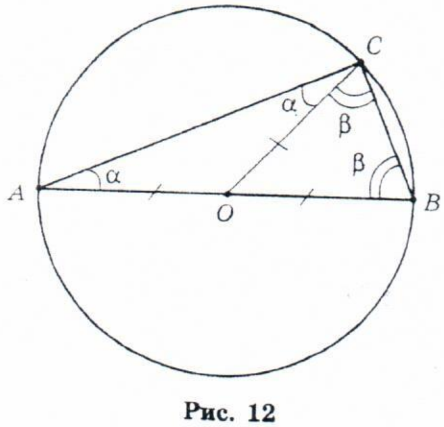

Рис. 12

Ответ. Верно.

Доказательство

Пусть угол C — не прямой. Тогда возможны два случая: либо угол C — острый, либо угол C — тупой.

Соединим точки O и C. Тогда

$$OA = OB = OC$$

как радиусы одной окружности и треугольники OAC и OBC — равнобедренные. Обозначим равные углы при основаниях AC и BC этих треугольников через α и β соответственно. Тогда в треугольнике ABC

$$\angle C = \alpha + \beta \text{ и } \angle A + \angle B = \alpha + \beta,$$

то есть

$$\angle C = \angle A + \angle B. \qquad (*)$$

Если $\angle C < 90^\circ$ (острый), то и $\angle A + \angle B < 90^\circ$ (см. (*)). Тогда

$$\angle A + \angle B + \angle C < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Если $\angle C > 90^\circ$ (тупой), то и $\angle A + \angle B > 90^\circ$ (см. (*)). Тогда

$$\angle A + \angle B + \angle C > 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Таким образом, угол C — прямой.

Задача 13. Дан треугольник ABC, в котором AB — наибольшая сторона (*рис. 13*). На сторонах AC и BC этого треугольника как на диаметрах

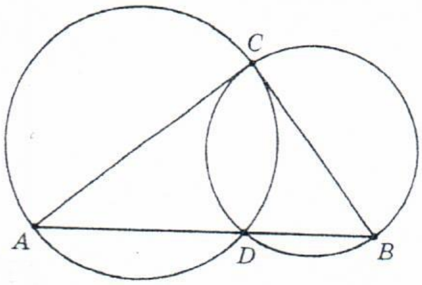

Рис. 13

построены окружности. Пусть точка D — вторая точка пересечения этих окружностей. Верно ли, что точка D принадлежит стороне AB?

Ответ. Верно.

Доказательство

Допустим, что точка D не принадлежит стороне AB (*рис. 14*) и окружности пересекают сторону AB в точках D_1 и D_2.

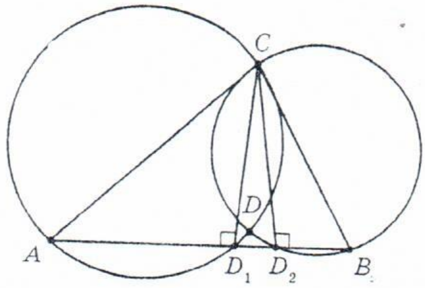

Рис. 14

Соединим точки D_1 и D_2 прямыми с точкой C. Тогда на основании задачи 12 утверждаем, что в треугольниках AD_1C и BD_2C углы AD_1C и BD_2C — прямые.

Получили противоречие: у треугольника D_1CD_2 два внешних прямых угла $\angle AD_1C$ и $\angle BD_2C$ (см. задачу 4). Значит, точка D принадлежит стороне AB.