Методическая разработка для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

метод неопределенных коэффициентов

(современные образовательные технологии-элективный курс)

От автора

При решении многих математических задач приходится выполнять тождественные преобразования выражений. Одним из наиболее распространенных методов тождественных преобразований является метод неопределенных коэффициентов (МНК).

Идея его состоит в следующем.

Пусть нам известно, что в результате некоторых преобразований получается выражение определенного вида и неизвестны лишь коэффициенты в этом выражении. Тогда эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Затем для определения этих неизвестных составляется система уравнений.

Ознакомить учащихся с МНК можно на элективных занятиях (или на занятиях кружка, факультатива или на уроках повторения курса математики средней школы).

12.01.2022г. С. Сефибеков

Метод неопределенных коэффициентов

При выборе метода решения математической задачи хорош тот метод, который быстро приводит к цели.

С.Р.Сефибеков

Применение метода неопределённых коэффициентов основано на следующих теоремах.

Теорема 1 (о многочлене, тождественно равном нулю). **Если при произвольных значениях аргумента x значение многочлена**

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

равно нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема утверждает, что никакой многочлен, представленный в стандартном виде, кроме нуль-многочлена, не может быть тождественно равным нулю.

Доказательство. **Применим метод математической индукции. Для многочлена первой степени** $f(x)=a_0+a_1x$ теорема верна. Действительно, если при произвольных значениях x значение двучлена $f(x)$ равно нулю, то, положив $x=0$, получим $a_0=0$ и, следовательно, $f(x)=a_1x\equiv0$. Положив $x=1$, получим $a_1=0$. Следовательно, $f(x)$ есть нуль-многочлен.

Предположим, что теорема верна для многочлена степени, низшей чем n. Докажем, что при этом предположении она будет верна и для многочлена степени n. Пусть при произвольных значениях x

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\equiv0. \qquad (1)$$

Покажем, что $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

Заменив в тождестве (1) x на $2x$, получим тождество

$$f(2x)=a_0+2a_1x+a_2(2x)^2+\ldots+a_n(2x)^n\equiv0,$$

$$f(2x)=a_0+2a_1x+2^2a_2x^2+\ldots+2^na_nx^n\equiv0. \qquad (2)$$

Умножим (1) на 2^n и вычтем из него почленно (2). Получим:

$$\left(2^n-1\right)a_0+2\left(2^{n-1}-1\right)a_1x+2^2\left(2^{n-2}-1\right)a_2x^2+$$
$$+\ldots+2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}\equiv0. \qquad (3)$$

По предположению многочлен степени, низшей чем n, может быть тождественно равным нулю лишь при условии, что все его коэффициенты равны нулю. Следовательно, из тождества (3) получим:

$$\left(2^n-1\right)a_0=0,\ \ 2\left(2^{n-1}-1\right)a_1=0,$$

$$2^2\left(2^{n-2}-1\right)a_2=0,\ \ldots,\ 2^{n-1}a_{n-1}=0,$$

откуда

$$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0.$$

Но тогда тождество (1) примет вид: $a_nx^n\equiv0$. Положив $x=1$, получим $a_n=0$.

Будучи верной для многочленов первой степени, теорема верна для многочленов любой степени.

Теорема 2. Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

и

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n.$$

Для того чтобы $f(x)\equiv g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$.

Доказательство

Достаточность. **Если все соответствующие коэффициенты двух многочленов** $f(x)$ и $g(x)$ равны, то **имеем одно и то же** (а не два различных) выражения. Поэтому значения данных многочленов **равны при всех** значениях аргумента.

Необходимость. **Пусть при всех значениях аргумента** x $f(x)=g(x)$. Тогда

$$f(x)-g(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+$$
$$+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n\equiv0.$$

Это возможно лишь при условии

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_n=b_n.$$

Приведём ещё одно **доказательство** необходимости.

Пусть

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n.$$

Полагая $x=0$, получим $a_0=b_0$ и значит,

$$a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\equiv b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n. \quad (4)$$

Разделим обе части (4) на x и, положив затем $x=0$, получим $a_1=b_1$. Продолжая действовать таким же образом, получим равенства и для остальных коэффициентов.

Определение МНК

Вначале поставим перед собой задачу «расположить многочлен

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

по степеням $x-x_0$», то есть найти выражение для $f(x)$ в виде многочлена, расположенного по степеням разности $x-x_0$, где x_0 — какое-либо значение x; $f(x)$ тождественно равно такому многочлену (очевидно, он также должен быть n-й степени).

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n. \quad (5)$$

Задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов A_0, A_1, A_2, ..., A_n. В каждом конкретном случае эти числа найти легко. В самом деле, расположим многочлен, находящийся в правой части равенства (5), по степеням x (в левой части — многочлен $f(x)$ стандартного вида). Поскольку мы имеем тождество, то (по теореме 2) коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны. Приравняв коэффициенты в правой части соответствующим заданным коэффициентам в левой части, придём к системе $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными A_0, A_1, A_2, ..., A_n, которую и остаётся решить.

Пример. Расположить многочлен

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$$

по степеням $x+1$.

Решение

Полагаем:

$$x^4+2x^3-3x^2-4x+1=A_0+A_1(x+1)+A_2(x+1)^2+A_3(x+1)^3+A_4(x+1)^4, \quad (*)$$

откуда

$$x^4+2x^3-3x^2-4x+1=A_4x^4+(4A_4+A_3)x^3+(6A_4+3A_3+A_2)x^2+(4A_4+3A_3+2A_2+A_1)x+(A_4+A_3+A_2+A_1+A_0).$$

Значит, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}A_4=1,\\ 4A_4+A_3=2,\\ 6A_4+3A_3+A_2=-3,\\ 4A_4+3A_3+2A_2+A_1=-4,\\ A_4+A_3+A_2+A_1+A_0=1,\end{cases}$$

откуда $A_4=1$, $A_3=-2$, $A_2=-3$, $A_1=4$, $A_0=1$.

Подставляя значения коэффициентов в (*), получим:

$$x^4+2x^3-3x^2-4x+1=$$
$$=1+4(x+1)-3(x+1)^2-2(x+1)^3+(x+1)^4.$$

Ответ.

$$f(x)=1+4(x+1)-3(x+1)^2-2(x+1)^3+(x+1)^4.$$

Такой метод решения поставленной задачи называют методом неопределённых коэффициентов.

Определение. Метод, состоящий в том, что искомое выражение заранее указанного вида записывают с неопределёнными коэффициентами, находимыми затем из условий выполнения некоторых тождественных равенств, называют методом неопределённых коэффициентов [1].

Приведём несколько примеров решения задач с использованием МНК.

1. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это число.

Решение. Поскольку

$$\left|40\sqrt{2}-57\right|=57-40\sqrt{2},$$

то, обозначив заданную разность через A, получим: $A=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$.

Положим, что выражение $57-40\sqrt{2}$ можно представить в виде $\left(a+b\sqrt{2}\right)^2$, где a и b — рациональные числа, то есть что

$$57-40\sqrt{2}=\left(a+b\sqrt{2}\right)^2.$$

Тогда $57-40\sqrt{2}=a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab$, откуда

$$\begin{cases}a^2+2b^2=57,\\ 2\sqrt{2}ab=-40\sqrt{2},\end{cases} \quad \begin{cases}a^2+2b^2=57,\\ ab=-20.\end{cases}$$

Система имеет решения:

$$a_1=5,\ b_1=-4;\ a_2=-5,\ b_2=4;$$

$$a_3=-4\sqrt{2},\ b_3=\frac{5}{\sqrt{2}};\ a_4=4\sqrt{2},\ b_4=-\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

При $a_1=5$, $b_1=-4$ имеем:

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5-4\sqrt{2}\right)^2}=\left|5-4\sqrt{2}\right|=4\sqrt{2}-5.$$

Очевидно, при подстановке оставшихся пар значений a и b получим такой же результат.

Аналогично устанавливаем, что

$$\sqrt{57+40\sqrt{2}}=5+4\sqrt{2}.$$

Значит, $A=4\sqrt{2}-5-\left(5+4\sqrt{2}\right)=-10.$

Ответ. -10.

В школьном курсе математики для избавления от иррациональности в знаменателе дроби используют частные приёмы, которые не всегда приводят к цели, например, когда знаменатель дроби содержит совокупность корней второй, третьей и т. д. степеней. Наиболее эффективным при решении таких задач является МНК.

2. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{2}{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}.$$

Решение. Пусть

$$\frac{2}{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}=a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}, \qquad (*)$$

где a, b, c — рациональные числа.

Тогда $\left(1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}\right)\left(a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\right)=2$, откуда

$$(a-3b-3c)+\sqrt[3]{3}(b-a-3c)+\sqrt[3]{9}(c-a-b)=2.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a-3b-3c=2, \\ b-a-3c=0, \\ c-a-b=0, \end{cases}$$

откуда $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$, $c=-\frac{1}{5}$.

Подставляя значения a, b, c в (*), получим:

$$\frac{2}{1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{3}-\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{9}=\frac{1}{5}\left(1-2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}\right).$$

Ответ. $\frac{1}{5}\left(1-2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}\right)$.

3. Разложить многочлен x^5+x^4+1 на множители.

Решение. Будем искать разложение в виде:

$$x^5+x^4+1=(x+1)\left(x^4+ax^3+bx^2+cx+1\right), \qquad (1)$$

или

$$x^5+x^4+1=(x-1)\left(x^4+ax^3+bx^2+cx-1\right), \qquad (2)$$

или

$$x^5+x^4+1=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^3+bx^2+cx+1\right), \qquad (3)$$

или

$$x^5+x^4+1=\left(x^2+ax-1\right)\left(x^3+bx^2+cx-1\right). \qquad (4)$$

Из равенства (1) имеем:

$$x^5+x^4+1=x^5+(a+1)x^4+$$
$$+(a+b)x^3+(b+c)x^2+(c+1)x+1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a+1=1, \\ a+b=0, \\ b+c=0, \\ c+1=0, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0, \\ 1=0. \end{cases}$

Эта система несовместна $(1\neq 0)$.

Аналогично, из равенства (2) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a-1=1, \\ b-a=0, \\ c-b=0, \\ 1-c=0, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} a=2, \\ b=2, \\ c=2, \\ -1=0. \end{cases}$

Эта система также несовместна $(-1\neq 0)$.

Таким образом, разложение данного многочлена в виде (1) и (2) невозможно.

Из равенства (3) имеем:

$$x^5+x^4+1=x^5+(a+b)x^4+(ab+c+1)x^3+$$
$$+(ac+b+1)x^2+(a+c)x+1,$$

откуда

$$\begin{cases} a+b=1, \\ ab+c+1=0, \\ ac+b+1=0, \\ a+c=0. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы третье, получим:

$$a(b-c)+(c-b)=0,$$

$$a(b-c)-(b-c)=0,$$

$$(b-c)(a-1)=0,$$

откуда $b=c$ или $a=1$.

Если $b=c$, то имеем:

$$\begin{cases} a+c=1, \\ ac+c+1=0, \\ a+c=0. \end{cases}$$

Эта система противоречива.

Если $a=1$, то имеем:

$$\begin{cases} b=0, \\ c+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} b=0, \\ c=-1. \end{cases}$$

Значит, при $a=1$, $b=0$, $c=-1$ получим искомое разложение:

$$x^5+x^4+1=(x^2+x+1)(x^3-x+1).$$

Аналогично, из равенства (4) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=1, \\ ab+c-1=0, \\ ac-b-1=0, \\ -a-c=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $b=1-a$, из последнего — $c=-a$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получим:

$$a(1-a)-a-1=0, \ -a^2-1=0, \ a^2=-1.$$

Ответ. $x^5+x^4+1=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$.

Примечание. Поскольку тема нашего разговора — метод неопределённых коэффициентов, мы разложили на множители многочлен x^5+x^4+1 этим методом, хотя это можно сделать так:

$$x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1=$$
$$=(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)=$$
$$=x^3(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$$
$$=(x^3-x+1)(x^2+x+1).$$

4. При каких значениях a и b многочлен

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

делится без остатка на x^2-3x+4?

Решение

Положим:

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b=(x^2-3x+4)(x^2+cx+d),$$
$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b=$$
$$=x^4+(c-3)x^3+(d-3c+4)x^2+(4c-3d)x+4d.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c-3=-3, \\ d-3c+4=3, \\ 4c-3d=a, \\ 4d=b, \end{cases}$$

откуда $c=0$, $d=-1$, $a=3$, $b=-4$.

Ответ. При $a=3$, $b=-4$.

Примечание. Это задание также предполагает способ решения без применения МНК.

$$\frac{x^4-3x^3+3x^2+ax+b}{x^2-3x+4}=$$
$$=\frac{x^4-3x^3+4x^2-(x^2-ax-b)}{x^2-3x+4}=x^2-\frac{x^2-ax-b}{x^2-3x+4}.$$

Очевидно, данный квадратный трёхчлен делится нацело на x^2-3x+4 при $a=3$ и $b=-4$.

5. Вычислить сумму:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Решение. Представим каждое слагаемое

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

в виде суммы четырёх элементарных дробей:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}+\frac{D}{k+3}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю. Имеем:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$
$$=\frac{(A+B+C+D)k^3+(6A+5B+4C+3D)k^2+(11A+6B+3C+2D)k+6A}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Из равенства этих дробей вытекает равенство их числителей, то есть

$$1=(A+B+C+D)k^3+(6A+5B+4C+3D)k^2+$$
$$+(11A+6B+3C+2D)k+6A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k в обеих частях, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ 6A+5B+4C+3D=0, \\ 11A+6B+3C+2D=0, \\ 6A=1, \end{cases}$$

откуда

$$A=\frac{1}{6}, \ B=-\frac{1}{2}, \ C=\frac{1}{2}, \ D=-\frac{1}{6}.$$

Таким образом, получаем тождество

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right), \ (*)$$

справедливое для любого натурального k.

Полагая в (*) $k=1; 2; \ldots; n$, находим сумму:

$$S_n=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)+\right.$$

$$\left.+3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n+3}\right)\right).$$

Выполним замену

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=a.$$

Имеем:

$$S_n=\frac{1}{6}\left(a-3\left(a-1+\frac{1}{n+1}\right)+\right.$$

$$+3\left(a-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-$$

$$\left.-\left(a-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right),$$

откуда $S_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$.

Ответ. $S_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$.

Иногда МНК существенно облегчает решение задач на нахождение первообразных функций. Рассмотрим задачи, решение которых вполне доступно школьникам.

6. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$, где $a\neq 0$.

Решение. Рассмотрим три случая в зависимости от дискриминанта $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

Случай 1. $D<0$. Выделим в знаменателе дроби полный квадрат. Получим:

$$f(x)=\frac{1}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{4a}{4ac-b^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2}.$$

Известно, что $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Значит, общий вид первообразных для функции $f(x)$ на множестве $\mathbb{R}$ таков:

$$F(x)=\frac{2\sqrt{4ac-b^2}}{4ac-b^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C.$$

Случай 2. $D=0$. Тогда $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ — двукратный корень трёхчлена. Значит,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

Тогда на множестве $(-\infty;x_1)\cup(x_1;+\infty)$ имеем первообразную:

$$F(x)=-\frac{1}{a(x-x_1)}+C,\ F(x)=-\frac{2}{2ax+b}+C.$$

Случай 3. $D>0$. Тогда квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Поэтому

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

и

$$f(x)=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Представим дробь

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{x-x_2},$$

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{(A+Ba)x-Ax_2-Bax_1}{a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Последнее равенство возможно при условии:

$$\begin{cases}A+Ba=0,\\-Ax_2-Bax_1=1,\end{cases}$$

откуда

$$A=\frac{1}{x_1-x_2}=-\frac{a}{\sqrt{b^2-4ac}},$$

$$B=\frac{1}{a(x_2-x_1)}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right).$$

Тогда на множестве $(-\infty;x_1)\cup(x_1;x_2)\cup(x_2;+\infty)$ имеем первообразную:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left(\ln|x-x_2|-\ln|x-x_1|\right)+C,$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C.$$

Ответ

$$\frac{2\sqrt{4ac-b^2}}{4ac-b^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C;$$

$$-\frac{2}{2ax+b}+C;\ \ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C.$$

7. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)=xe^{\alpha x}$, где $\alpha\neq 0$.

Решение. Общий вид первообразных будем искать в виде:

$$F(x)=(Ax+B)e^{\alpha x}+C,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Поскольку $F'(x)=f(x)$, то

$$\alpha e^{\alpha x}(Ax+B)+Ae^{\alpha x}=xe^{\alpha x},$$

или

$$(A\alpha)x+(A+B\alpha)=x,$$

откуда

$$\begin{cases}A\alpha=1,\\ A+B\alpha=0.\end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$A=\frac{1}{\alpha},\ \ B=-\frac{1}{\alpha^2}.$$

Значит,

$$F(x)=\left(\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}+C.$$

Ответ. $\left(\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}+C.$

Ещё раз обратим внимание читателей на то, что рассмотренные задачи можно решать иначе (для некоторых заданий мы это показали). Однако приведённые решения показывают известную универсальность метода неопределённых коэффициентов и открывают возможность дальнейших его приложений (в первую очередь — к классической задаче разложения рациональной дроби на элементарные).

Литература

1.Бермант А.Ф. Курс математического анализа, часть 1. _ М.: физматгиз, 1958.

2.Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры.-М. : Высшая школа, 1962.

3.Сефибеков С.Р. Внеклассная работа по математике: Книга для учителя.- М. : Просвещение, 1988.

4.Сефибеков С.Р. Метод неопределенных коэффициентов// Математика. Все для учителя!- 2014.-№1.-С. 31-36.