Сефибеков Сефибек Рамазанович

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Методические рекомендации для студентов

Сефибеков
Сефибек Рамазанович

Заслуженный учитель Республики Дагестан, кандидат педагогических наук, МБОУ «Кашкентская СОШ» Хивского района Республики Дагестан.

Автор более 50 научных и методических работ, регулярно публикуется в журналах «Квант» и «Математика в школе».

Научные работы автора посвящены исследовательской деятельности школьников в урочной и внеурочной деятельности по математике на основе авторских элективных разработок "За страницами школьного учебника".

От автора

В материалах методических рекомендаций представлено содержание элективного курса по математике в средней школе, изложены основные требования к отбору материала для организации занятий, принципы отбора задач, ориентированных на усвоение содержания элективного курса . В целях улучшения теоритической подготовки студентов и педагогов предложены авторские разработки по 9 темам дисциплины.

Методические рекомендации предназначены для студентов, будущих педагогов ,с целью формирования и совершенствование базовых методических умений и творческого подхода к организации и проведению элективов по математике в средней школе, а также педагогов, ведущих кружковую работу и факультативные занятия с целью углубления и расширения знаний учащихся в области математики.

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ ОРГАНИЗАЦИИ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Программа по математике для средней общеобразовательной школы, работающей по базисному учебному плану, предполагает формирование у учащихся представлений о математике как части общечеловеческой культуры, как определенном методе познания мира. Но на сегодняшний день содержание школьного курса математики не соответствует требованиям, возникшим в современных условиях. Объем знаний, необходимый человеку, резко возрастает, в то время как количество отводимых часов для занятий сокращается. Школьная математика оставляет учащихся на рубеже прошлых веков и мало знакомит с современными научными достижениями.

Одним из путей разрешения имеющихся проблем является переход школы на профильное обучение и введение элективных курсов по математике.

Элективные курсы должны быть содержательно связаны с конкретным профилем, моделируя характерные для него учебные ситуации и проблемы.

Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору старшеклассников, которые реализуются за счет школьного компонента и имеют следующие **цели:**

1. Развитие содержания базового курса математики, изучение которого в данной школе осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет поддерживать на профильном уровне или получать дополнительную подготовку для сдачи ЕГЭ по математике.

2. Дополнение содержания профильного курса математики. Курсы выступают его надстройкой, что позволяет профильному курсу быть в полной мере углубленным.

3. Удовлетворение разнообразных познавательных интересов школьников, выходящих за рамки выбранного ими профиля, в разных сферах человеческой деятельности.

4. Развитие математического мышления, воспитание мировоззрения и ряда личностных качеств средствами углубленного изучения математики.

5. Элективные курсы играют роль в совершенствовании школьного образования, позволяют производить поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых методов обучения, а также варьировать объем и сложность изучаемого материала.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОТБОРУ МАТЕРИАЛА ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ЗАНЯТИЙ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

Элективный курс по математике представляет собой одну конкретную тему, рассматриваемую глубоко (например, элективный курс может называться «Логические задачи», а может состоять из нескольких тем, связанных друг с другом. Например, «Площадь, определители, геометрические выводы»).

Основной курс математики является базой тем для углубленного изучения на элективном курсе. Но учитель вправе проводить свой элективный курс, который может иметь общее с основным курсом. Элективные курсы – дополнения математических кружков и факультативов, наполняют их не только новым содержанием, новыми подходами к раскрытию материала, но и компонентами, присущими любому учебному предмету: связностью изложения, длительностью изучения темы и т.д.

Элективные курсы представляют большие возможности при подготовке к ЕГЭ, олимпиадам и т.д.

Любой элективный курс не мыслим без определенного набора задач, соответствующих данному курсу. Задачи являются эффективным средством усвоения учащимися понятий, методов, математических теорий, действенным средством развития культуры их мышления, средством привития им умений и навыков в практических применениях математики.

В литературе выделяются следующие принципы отбора задач, ориентированных на усвоение содержания элективного курса:

1. *Принцип преемственности.* В самом содержании задачи «заложено» содержание обучения математике (понятия, определения, теоремы, способы деятельности и т.д.). Задачи устанавливают взаимосвязи различных тем и предметов, основного курса математики и элективного курса.

2. *Принцип связи теории с практикой.* Задачи должны выступать как средства усвоения знаний.

3. *Принцип полноты.* Это – полное отражение в цепочке задач математических идей, установление межпредметных связей.

4. *Принцип контрастности.* На начальных этапах обучения необходимо брать контрастные виды заданий, не допускать повторяемости одних и тех же видов.

5. *Принцип обучения эвристическим приемам.* Основными эвристическими приемами являются: аналогия, индукция, прием элементарных задач, прием обратимости в решении математических задач и т.д.

6. *Принцип формирования исследовательских умений.* Под учебным исследованием понимается вид познавательной деятельности, который связан с выполнением учебных заданий, целью которых является самостоятельный творческий поиск учащимися новых для них знаний.

Элективные курсы позволяют наиболее успешно применять индивидуальный подход к каждому учащемуся с учетом их способностей, более полно удовлетворять их познавательные и жизненные интересы.

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Содержание элективных курсов определяется программой, разработанной учителем (по его авторскому вкусу) и предусматривает изучение разделов, например «Круговая перестановка в математических объектах», «Интеграл помогает доказывать неравенства» и др. К программе прилагается список литературы, рекомендованный для изучения элективного курса, а также его примерное содержание.

ИСТОРИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ НА ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСАХ

На элективных курсах можно уделить гораздо больше внимания истории математики, чем в основном курсе (особенно для гуманитарного профиля). Полезно также заниматься переоткрытием исторических теорем. Например, элементарные доказательства формулы Пика и формулы Ньютона – Симпсона, координатное доказательство теоремы Эйлера, геометрическое решение задачи Архимеда и т.д.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Программа элективных курсов чаще всего является авторской. Ее усвоение потребует от учащихся умения слушать и воспринимать материал, конспектировать, а также использовать дополнительную литературу.

Кроме того, элективные курсы должны способствовать развитию навыков самостоятельной работы. С этой целью особое внимание необходимо уделить организации среди учащихся исследовательской деятельности. А это можно осуществить, включая в программу различные практикумы:

1. Групповая работа с научным текстом с последующим коллективным анализом для определения основных понятий, для выделения проблемы, постановки целей и задач исследования.
2. Подбор литературы по заданной теме (использовать Интернет, посещать библиотеки, книжные магазины).
3. Публичные выступления по заданной теме.

ТЕМА 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Поиск решения математической задачи осуществляется с помощью исследования. И в процессе исследования учащиеся сталкиваются с такими фактами, которые подталкивают их к научному поиску. Работа по воспитанию навыков поискового мышления должна проводиться учителем на уроках в процессе преподавания программного материала, а затем роль такой работы усиливается на элективных курсах. Каждый учащийся, посещающий элективный курс, должен принимать активное участие. Добиться этого можно через поручение заданий самостоятельно, например можно сообщить учащимся образцы некоторых наиболее характерных задач, подготовленных к рассмотрению на элективном курсе, не предлагая их для решения, а только попросив их рассмотреть (такие задачи можно отражать и в школьном математическом уголке). Это важно для того, чтобы учащиеся почувствовали затруднения, а затем прилагать усилия к тому, чтобы они старались преодолеть эти затруднения. В частности, нахождение корней уравнений выше второй степени вызывает интерес у учащихся.

Для этого составляем план действий:

1. Научиться делить один многочлен на другой и записать результат, выразить делимое через другие компоненты.

2. Делить многочлен на одночлен и записать делимое с одной стороны равенства, а другие компоненты с помощью умножения и сложения – с другой.

3. Назвать случай, когда делимое становится кратным делителю (остаток равен нулю), значит, если многочлен слева (делимое) равен произведению двух многочленов справа, то их коэффициенты в итоге должны быть равными. Пояснив эти вопросы предварительно на элективном курсе, заинтересованные учащиеся с удовольствием могут сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях.

Например, дан многочлен:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 .$$

Если этот многочлен делить на $x - c$, то должно получиться равенство:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x-c)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + r$$

($r=0$ в случае деления без остатка).

Раскрывая скобки справа, получим

$$(x-c)(b_0x^2 + b_1x + b_2) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x - cb_0x^2 - cb_1x -$$
$$- cb_2 = b_0x^3 + (b_1 - cb_0)x^2 + (b_2 - cb_1)x - cb_2.$$

Сравнивая коэффициенты с первоначальными, получим равенства:

$$a_0 = b_0;\ a_1 = b_1 - cb_0;\ a_2 = b_2 - cb_1;\ a_3 = -cb_2 + r;$$
$$b_0 = a_0;\ b_1 = a_1 + cb_0;\ b_2 = a_2 + cb_1;\ r = a_3 + cb_2.$$

Рассмотрим конкретный пример.

Выяснить, делится ли многочлен

$$3x^3 - 2x^2 + 4x - 10 \text{ на } x-2.$$

Равенство можно записать:

$$3x^3 - 2x^2 + 4x - 10 = (x - 2)\ b_0x^2 + b_1x + b_2) + r.$$

Имеем:

$$b_0 = a_0 = 3;\ b_1 = -2 + 2 \cdot 3 = 4;\ b_2 = 4 + 2 \cdot 4 = 12;$$
$$r = -10 + 2 \cdot 12 = 14.$$

Запишем эти коэффициенты в виде таблицы:

$a_0 = 3$	$a_1 = 2$	$a_2 = 4$	$a_3 = -10$
$b_0 = 3$	$b_1 = 4$	$b_2 = 12$	$r = 14$

$$3x^3 - 2x^2 + 4x - 10 = (x-2)\,(3x^2 + 4x + 12) + 14.$$

Значит, мы обнаружили, что при делении многочлена $3x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ на многочлен $x - 2$ в частном получили многочлен $3x^2 + 4x + 12$ и остаток 14.

Верность такого рассуждения можно проверить раскрытием скобок. В упражнениях 2–3 примерами учащиеся приобретают навыки быстрого вычисления, и определить остаток, значит, выяснить, делится ли без остатка или нет. Тот же пример можно использовать, взяв в качестве делителя не $x - 2$, а $x + 2$, и выяснить, как изменится ход решения:

$$a_0 = b_0;\ \ b_1 = a_1 + (-2)\cdot b_0;\ b_2 = a_2 + (-2)\cdot b_1;\ r = a_3 + (-2)\cdot b_2;$$

$$b_0 = 3;\ \ b_1 = -2 + (-2)\cdot 3 = -8;\ b_2 = 4 + (-2)\cdot(-8) = 20;$$

$$r = -10 + (-2)\cdot 20 = -50.$$

Итак,

$$3x^3 - 2x^2 + 4x - 10 = (x+2)\,(3x^2 - 8x + 20) - 50.$$

$$a = b;\ b = a + (-2)\cdot b;\ b = a + (-2)\cdot b.$$

После таких тренировок можно предложить обобщенную схему (схему Горнера):

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	и т.д.
b_0	$b_1 = a_1 + cb_0$	$b_2 = a_2 + cb_1$	$b_3 = a_3 + cb_2$	$b_4 = a_4 + cb_3$	

Задания можно разнообразить определением остатка при делении конкретного многочлена на двучлен. Например, при делении

$$2x^4 - 6x^3 + 39x + 109 \ \text{ на } \ x + 1:$$

$a_0 = 2$	$a_1 = -6$	$a_2 = 13$	$a_3 = -39$	$a_4 = 109$
$b_0 = 2$	$b_1 = -6 + (-1)\cdot 2 = -8$	$b_2 = 13 + (-1)\cdot(-8) = 21$	$b_3 = -39 + (-1)\cdot 21 = -60$	$r = 109 + (-1)\cdot(-60) = 169$

Тема *«Вычисление корней многочленов»* является захватывающей для учащихся; используя схему Горнера, к которой пришли через деление одного многочлена на двучлен, т.е. при делении многочлена, например, на $x + 2$, число -2 является корнем только в том случае, если остаток равен 0. Причем число рациональных корней находится среди делителей свободного члена данного многочлена.

Например, рациональные корни многочлена (уравнения) $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = 0$ находятся, если они имеются среди делителей числа 15, а делителями числа 15 являются $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$.

Для этого делим $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ на $x - 1$:

$a_0 = 1$	$a_1 = 2$	$a_2 = -16$	$a_3 = -2$	$a_4 = 15$
$b_0 = 1$	$b_1 = 2 + 1 \cdot 1 = 3$	$b_2 = -16 + 1 \cdot 3 = -13$	$b_3 = -2+1 \cdot (-13) = -15$	$r = 15+1 \cdot (-15) = 0$

Значит, корнем многочлена является число 1 и многочлен делится на $x - 1$ без остатка, то есть

$$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x - 1)\,(x^3 + 3x^2 - 13x - 15).$$

Можно составить сборник упражнений подобных заданий, что служит поводом для дальнейшей мотивации увлечения школьников элективным курсом. В подобных занятиях учащиеся видят взаимосвязь между делимым, делителем и частным, а также остатком при делении в числовом множестве, и это правило целиком и полностью трансформируется на деление многочленов.

А сравнение коэффициентов при одинаковых степенях многочлена становится основой исследования и вывода правила вычисления коэффициентов того многочлена, который является частным от деления делимого на делитель. Исследовательская деятельность осуществляется при имеющихся знаниях по школьному учебнику.

ТЕМА 2. ПРИНЦИП ОБРАТИМОСТИ В МАТЕМАТИКЕ

Существенную роль в развитии математической деятельности учащихся играет принцип обратимости. С помощью этого принципа облегчается решение разнообразных задач.

Теоретическая часть

Неправильное понимание соотношения между прямой и обратной теоремами часто служит источником ошибок при решении математических задач учащимися.

Например, они утверждают:

1) если $x = y$, то $\sin x = \sin y$ и

2) если $\sin x = \sin y$, то $x = y$.

Утверждение 1) – это прямая теорема, она верна;

Утверждение 2) – это обратная теорема, она ошибочна.

В этом убеждаем учащихся действительно:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} \text{ и } \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}.$$

Пусть даны два математических предложения A и B.

Рассмотрим прямую теорему: *«Если есть A, то есть и B»*.

В этом случае говорят, *что B есть следствие A и пишут*

$$A \Rightarrow B$$

(«$\Rightarrow$» — знак следования; читается «из A следует B»).

Теперь рассмотрим обратную теорему: ***«Если есть B, то есть и A»:***

$$B \Rightarrow A.$$

Здесь говорят, *что A есть следствие B.*

Определение. *Если B есть следствие A, и A есть следствие B, то предложения A и B называют равносильными:*

$$A \Leftrightarrow B.$$

(знак «$\Leftrightarrow$» означает равносильность — двойное следование).

Схематическая запись определения:

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow B, \\ B \Rightarrow A \end{array}\right| \Rightarrow A \Leftrightarrow B.$$

Практически, чтобы быть уверенным в равносильности предложений A и B, достаточно проверить обратимость выкладок, с помощью которых был выполнен переход от исходного предложения A к новому (преобразованному) предложению B, т.е. проверить возможность выполнения выкладок в обратном порядке — переходить от B к A. Если обратимость имеет место, то предложения A и B равносильны.

Например, неравенства $(a-b)^2 \geq 0$ и $a^2+b^2 \geq 2ab$ равносильны.

Докажем это:

$$(a-b)^2 \geq 0. \qquad (1)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0. \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \qquad (3)$$

Обратно (переход от (3) к (1)):

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \qquad (3)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0. \qquad (2)$$

$$(a-b)^2 \geq 0. \qquad (1)$$

Таким образом, *по определению равносильности* данные неравенства равносильны:

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Принцип обратимости. Пусть мы имеем цепочку равносильных предложений:

$$A_n \Leftrightarrow A_{n-1} \Leftrightarrow A_{n-2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_1, \qquad (4)$$

т.е. $A_n \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$

и выполняется обратимость:

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n.$$

Допустим, что нам следует доказать предложение A_n (см. (4)). Применяя обратимые операции, перейдем от A_n к более простому предложению A_1.

Тогда, если мы докажем истинность предложения A_1, то будет истинным и предложение A_n (причем здесь не следует обратно перейти от A_1 к A_n, а важно следить только за обратимостью применяемых операций). Этим принципом полезно воспользоваться, когда нельзя придумать прямое доказательство для предложения A_n.

Примерами обратимых операций являются следующие операции, известные учащемуся из школьного учебника:

1. Применение тождеств.
2. Перенос членов равенства (или неравенства) из одной части в другую.
3. Почленное сложение неравенств.
4. Умножение обеих частей равенства (или неравенства) на число, не равное нулю.
5. Замена одной геометрической формулы другой, более простой и т.п.

Практическая часть

Рассмотрим четыре примера.

1. *Решите уравнение*:

$$\sqrt{3x-11} = 7 - \sqrt{5x}. \qquad (1)$$

Учащиеся: $x_1 = 5$ входит в промежуток (3), значит $x_1 = 5$ – корень уравнения $x_2 = 180$ не входит в промежуток (3), значит $x_2 = 180$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: $x = 5$.

Как видно из решенного примера, роль учителя заключалась в направлении учащихся на верный путь логических рассуждений.

Аналогично решались и следующие задания.

2. *Решить неравенство*:

$$\cos x > \sqrt{1 - \sin 2x}.$$

Решение

ОДЗ неравенства находим из условия:

$$\begin{cases} 1 - \sin 2x \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \sin 2x \leq 1 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x > 0. \qquad (1)$$

Возводя обе части неравенства в квадрат в области (1), получим равносильное неравенство:

$$\cos^2 x > \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x,$$

$$\sin x(\sin x - 2\cos x) < 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно совокупности двух систем (см. (1)):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x - 2\cos x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x - 2\cos x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x < 2\cos x \\ \cos x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x > 2\cos x \\ \cos x > 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (3)$$

Вторая система совокупности (3) противоречива. Из первой системы совокупности (3) имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 2. \end{cases}$$

Решение уравнения происходит под непосредственным руководством учителя.

Учитель. В какой области мы рассматриваем уравнение (1)?

Учащиеся находят область допустимых значений (ОДЗ) уравнения из условия:

$$\begin{cases} 3x - 11 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ 7 - \sqrt{5x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{3} \\ \sqrt{5x} \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{3} \\ x \leq \frac{49}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{3} \leq x \leq \frac{49}{5}. \qquad (2)$$

Учитель: Удовлетворяют ли концы промежутка из примера (2) $x = \frac{11}{3}$ и $x = \frac{49}{5}$ уравнению (1)?

Учащиеся проверяют и устанавливают, что они не удовлетворяют уравнению.

Учитель. Напишите ОДЗ уравнения (1).

Учащиеся пишут:

$$\frac{11}{3} < x < \frac{49}{5}. \qquad (3)$$

Учитель: Возведите в области (3) обе части уравнения (1) в квадрат, и вы получите равносильное уравнение.

Учащиеся:

$$3x - 11 = 49 - 14\sqrt{5x} + 5x; \; 7\sqrt{5x} = x + 30. \qquad (4)$$

Учитель: Какие значения принимают обе части уравнения (4) в области (3)?

Учащиеся: Положительные.

Учитель: Снова возведите обе части уравнения (4) в квадрат, и вы получите равносильное уравнение.

Учащиеся: $x^2 - 185x + 900 = 0$, откуда $x_1 = 5$ и $x_2 = 180$.

Учитель: Проверьте, входят ли найденные корни в ОДЗ уравнения (1) и запишите ответ.

Но, в таком случае, соответствующие углы оканчиваются в первой четверти, а так как $\operatorname{tg} x < 2$, то решения должны удовлетворять соотношениям:

$$2\pi k < x < \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, \qquad k \in Z.$$

3. *Доказать неравенство:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, \qquad (1)$$

где a, b, c, S – стороны и площадь треугольника.

Решение

Выполним в неравенстве (1) обратимые преобразования:

$$(a^2 - (b-c)^2) + (b^2 - (c-a)^2) + (c^2 - (a-b)^2) \geq 4S\sqrt{3},$$

или, учитывая формулу Герона:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

получим:

$$(a-b+c)(a+b-c) + (b-c+a)(b+c-a) + (c-a+b)(c+a-b) \geq$$
$$\geq 3\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}. \qquad (2)$$

Введя новые переменные:

$$x = a+b-c,$$
$$y = a-b+c,$$
$$z = -a+b+c,$$

неравенство (2) примет вид:

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

или, разделив обе части неравенства на $xyz > 0$, имеем:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{x}\right)}. \qquad (3)$$

Еще раз введя новые переменные:

$$x_1 = \frac{1}{x}, \; y_1 = \frac{1}{y} \; \text{ и } \; z_1 = \frac{1}{z},$$

неравенство (3) примет вид:

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq \sqrt{3(x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1)},$$

или

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1z_1 + 2z_1x_1 \geq 3(x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1),$$

$$2x_1^2 + 2y_1^2 + 2z_1^2 - 2x_1y_1 - 2y_1z_1 - 2z_1x_1 \geq 0,$$

откуда

$$(x_1 - y_1)^2 + (y_1 - z_1)^2 + (z_1 - x_1)^2 \geq 0. \qquad (4)$$

Неравенство (4) очевидно, поэтому верно и неравенство (1).

4. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков AM и MB ($AM > MB$; рис. 1), *докажите, что основание перпендикуляра* KH, *опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам*:

$$AH = HM + MB \qquad (1)$$

(задача Архимеда).

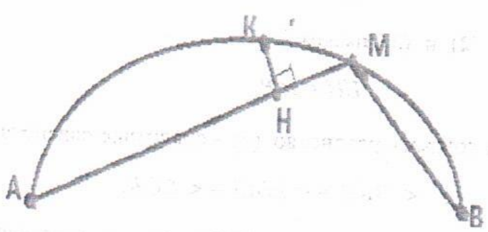


Рис. 1

Решение

Выполним следующие построения. Достроив дугу AB до окружности с центром O, проведем радиусы OA, OK, OM, OB и серединные перпендикуляры OE и OP соответственно к хордам AM и MB (рис. 2; C и D – точки их пересечения с окружностью).

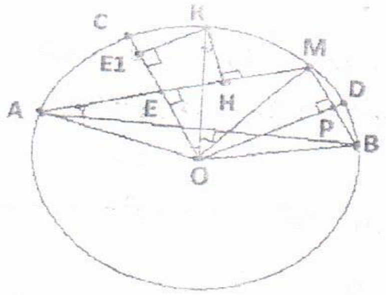


Рис. 2

Тогда $OK \perp AB$. Из условия (1): $AH - HM = MB$. С другой стороны, $AH + HM = AM$. Из этих равенств $AH = \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB$ или

$$AH = AE + MP. \tag{2}$$

Далее,

$$AH = AE + EH. \tag{3}$$

Из равенства (2) и (3) имеем:

$$EH = MP. \tag{4}$$

Нам остается доказать равенство (4) – следствие равенства (1).

$$< HKO = < MAB = < COK,$$

как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Но,

$$< MAB = \frac{1}{2} \cup MB = \cup MD,$$

$$< COK = \cup CK,$$

и поэтому

$$\cup CK = \cup MD.$$

Отсюда равны и хорды CK и MD, а также и треугольники COK и MOD по трем сторонам. Проведя в треугольнике COK высоту KE_1 ($KE_1 = EH$, т.к. EE_1KH – прямоугольник), заключаем, что $KE_1 = MP$, т.е. $EH = MP$.

Таким образом, из верности равенства (4) следует верность равенства (1).

ТЕМА 3. СИММЕТРИЯ В АЛГЕБРЕ

Важную роль в математической деятельности учащихся играет перенос понятий из одной ветви математической науки в другую. Например, понятие «симметрия» относится к геометрии. Но это понятие можно определить и для алгебраических объектов-выражений, равенств, систем и неравенств. Тогда многие алгебраические задачи решаются проще. Некоторые симметричные объекты встречаются в школьных учебниках алгебры.

Например,

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2,\ a + b = b + a,$$

$$(a - b)^2 = (b - a)^2,\ \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ и т.д.}$$

Теоретическая часть

Определим, например, симметрию для объектов с тремя буквами.

Пусть

$$a, b, c \tag{1}$$

– система трех букв, заданных в определенном порядке. Замена первой буквы второй, второй буквы – третьей, и третьей буквы – первой: $a \to b \to c \to a$ называется круговой (или циклической) перестановкой данных букв.

Схема круговой перестановки изображается так (**рис. 3**):

Рис. 3

Круговая перестановка $a \to b \to c \to a$ переводит расположение букв (1) в следующее расположение: b, c, a.

Применив повторно круговую перестановку $b \to c \to a \to b$, получим: c, a, b.

Примечание. Аналогично рассматриваются перестановки и для системы n букв.

Определение. Пусть $f(a, b, c)$ – алгебраический объект, состоящий из системы трех различных букв: a, b и c (кроме букв в нем могут быть и числа). Будем называть этот объект симметричным относительно этих букв, если при круговой перестановке букв он не изменяется (переходит сам в себя), т.е.

$$f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b).$$

Практическая часть

Применение круговой перестановки облегчает преобразование симметричных сумм или произведений, в которых всякое последующее слагаемое получается из предыдущего круговой перестановкой букв. Для таких объектов достаточно преобразовать лишь первое слагаемое, а результаты преобразования остальных слагаемых получаются путем последовательного применения круговой перестановки букв.

Рассмотрим следующий пример.

Упростить выражение:

$$\frac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}. \qquad (1)$$

Учитель: Симметрично ли данное выражение?

Учащиеся: Да, так как при круговой перестановке $a \to b \to c \to a$ оно переходит само в себя.

Учитель: Обозначьте знаменатель через Σ.

Учащиеся:

$$\Sigma = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

Учитель: Вычислите произведение $a\sum$

Учащиеся:

$$a\sum = a^3(b-c) + ab^2(c-a) + ac^2(a-b)$$

или

$$a\sum = a^3(b-c) + ab^2c - a^2b^2 + a^2c^2 - abc^2. \qquad (2)$$

Учитель: Выполните круговую перестановку букв $a \to b \to c \to a$ в равенстве (1).

Учащиеся:

$$b\sum = b^3(c-a) + bc^2a - b^2c^2 + b^2a^2 - bca^2. \qquad (3)$$

Учитель: Еще раз выполните круговую перестановку букв $b \to c \to a \to b$ в равенстве (2).

Учащиеся:

$$c\sum = c^3(a-b) + ca^2b - c^2a^2 + c^2b^2 - cab^2. \qquad (4)$$

Учитель: Сложите почленно равенства (1) – (3).

Учащиеся:

$$(a+b+c)\sum = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

$$(a+b+c)\,(a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b),$$

откуда значение искомого выражения равно $a+b+c$, так как по условию

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \neq 0$$

(т.е. $a \neq b, b \neq c, c \neq a$: $a \neq b \neq c$).

Ответ: $a+b+c$.

Отметим, что учитель разбил данное задание на несколько упражнений и предлагал учащимся последовательно выполнить эти упражнения. А учащиеся сами провели все математические выкладки и подошли к «финишу». Только таким образом у учащихся можно формировать математическую деятельность.

ТЕМА 4. ПОСТОРОННИЕ КОРНИ УРОВНЕНИЯ

При подготовке к экзаменам (да и не только) следует поговорить с учащимися о посторонних корнях уравнения. С понятием «посторонний корень» учащиеся впервые встречаются при изучении темы «Иррациональные уравнения» ([1], с. 214, пример 2). Но посторонние корни могут появляться и при решении других уравнений, например дробных, логарифмических.

Следствие и равносильность

Пусть имеем два уравнения:

$$f_1(x)=q_1(x) \qquad (1)$$

и

$$f_2(x)=q_2(x). \qquad (2)$$

Определение 1. Если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Записывают так:

$$f_1(x)=q_1(x) \Rightarrow f_2(x)=q_2(x).$$

Читают так: Из уравнения $f_1(x)=q_1(x)$ следует уравнение $f_2(x)=q_2(x)$.

Пример 1. $x-1=0 \Rightarrow x^2-1=0$, т. к. уравнение $x-1=0$ имеет корень $x=1$, который является корнем уравнения $x^2-1=0$.

Пример 2

$$(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)(x-4)=0,$$

т. к. корни первого уравнения $x=-2$, $x=-3$ являются корнями второго уравнения.

Пример 3. Из уравнения $(x+2)(x+3)=0$ не следует уравнение $(x-1)(x+5)(x+6)=0$, т. к. корни первого уравнения $x=-2$, $x=-3$ не являются корнями второго уравнения.

Определение 2. Если каждое из уравнений (1) и (2) является следствием другого, то есть

$$f_1(x)=q_1(x) \Rightarrow f_2(x)=q_2(x)$$

и

$$f_2(x)=q_2(x) \Rightarrow f_1(x)=q_1(x),$$

то эти уравнения называют равносильными.

Записывают так: $f_1(x)=q_1(x) \Leftrightarrow f_2(x)=q_2(x)$.

Читают так: Уравнение $f_1(x)=q_1(x)$ равносильно уравнению $f_2(x)=q_2(x)$.

Замечание 1. Уравнения, не имеющие корней, также называют равносильными.

Пример 4. $x^2=9 \Leftrightarrow x^4=81$, т. к. $x=-3$, $x=3$ — корни и первого, и второго уравнения.

Посторонние корни

При решении некоторых уравнений приходится переходить к уравнениям более простым, которые являются следствиями данных. В результате могут появляться посторонние корни.

При переходе к уравнению-следствию выполняют неравносильные преобразования. В этом случае уравнение-следствие может иметь корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Их называют *посторонними корнями.* Посторонние корни могут появляться всякий раз, когда при преобразовании происходит расширение области допустимых значений (области определения) данного уравнения. В этом случае все найденные корни уравнения-следствия необходимо проверить, подставив их в исходное уравнение (то есть проверка подстановкой в исходное уравнение здесь является обязательной частью решения). Те корни, которые не удовлетворяют исходному уравнению, являются посторонними.

Выделим три типа преобразований, приводящих к появлению посторонних корней.

I. Умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную

Если обе части уравнения умножить на выражение, содержащее переменную, при условии, что это выражение может обращаться в нуль при некотором значении переменной, то возможно появление посторонних корней.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $x-1=0$. $x=1$ — его корень. Умножим обе части уравнения на $x+2$ ($x+2=0$ при $x=-2$), получим уравнение $(x-1)(x+2)=0$, корни которого $x=1$ и $x=-2$. Но корень $x=-2$ второго уравнения не является корнем первого уравнения, то есть $x=-2$ — посторонний корень для первого уравнения.

Преобразования такого вида часто выполняют при решении дробно-рациональных уравнений, чтобы освободиться от знаменателя дроби.

Замечание 2. При решении дробно-рациональных уравнений целесообразно использовать условие равенства дроби нулю.

Пример 6. Решить уравнение $\frac{3x}{3-x}+\frac{9}{x-3}=x$.

Решение

Способ 1

$$\frac{3x}{3-x}+\frac{9}{x-3}=x \Leftrightarrow \frac{3x}{3-x}-\frac{9}{3-x}=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-9=3x-x^2 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Проверка

При $x=-3$ из данного уравнения получим: $-\frac{9}{6}-\frac{9}{6}=-3$, $-3=-3$ — верно. Значит, $x=-3$ — корень.

При $x=3$ из данного уравнения получим: $\frac{9}{0}+\frac{9}{0}=3$ — равенство невозможно (на нуль делить нельзя). Значит, $x=3$ — посторонний корень.

Способ 2

$$\frac{3x}{3-x}+\frac{9}{x-3}=x \Leftrightarrow \frac{3x}{3-x}-\frac{9}{3-x}=x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-9-x(3-x)}{3-x}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{3-x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=9,\\ 3-x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=3,\end{array}\right.\\ x\neq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ. -3.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-4x-4}=0.$$

Способ 1

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-4x-4}=0 \Rightarrow x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+2x^2\right)-(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Проверка

При $x=1$ из данного уравнения получим: $\frac{0}{-6}=0$, $0=0$ — верно. Значит, $x=1$ — корень.

При $x=-1$ из данного уравнения получим: $\frac{0}{0}=0$ — такое равенство невозможно. Значит, $x=-1$ — посторонний корень.

При $x=-2$ из данного уравнения получим: $\frac{0}{0}=0$, что невозможно. Значит, $x=-2$ — посторонний корень.

Способ 2

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-4x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+2x^2-x-2=0,\\ x^3+x^2-4x-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\neq 2,\\ x\neq -2,\\ x\neq -1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ. 1.

II. Возведение обеих частей уравнения в чётную степень

Справедлива следующая теорема.

Если обе части уравнения

$$f(x)=q(x) \qquad (1)$$

при всех допустимых значениях x имеют одинаковые знаки, то, возведя его в чётную степень n $(n\in\mathbb{N})$, получим уравнение

$$\left(f(x)\right)^n=\left(q(x)\right)^n, \qquad (2)$$

равносильное данному.

Доказательство

1. Пусть $x=x_0$ — корень уравнения (1), тогда $f(x_0)=q(x_0)$. Возведём полученное числовое равенство в степень n, получим:
$$\left(f(x_0)\right)^n=\left(q(x_0)\right)^n.$$
Значит, $x=x_0$ — корень уравнения (2).
2. Пусть $x=x_0$ — корень уравнения (2), тогда $\left(f(x_0)\right)^n=\left(q(x_0)\right)^n$. Извлекая корень n-й степени, получим:
$$\left|f(x_0)\right|=\left|q(x_0)\right|. \qquad (3)$$

По условию $f(x_0)$ и $q(x_0)$ — числа одного знака. Если $f(x_0)>0$ и $q(x_0)>0$, то $\left|f(x_0)\right|=f(x_0)$, $\left|q(x_0)\right|=q(x_0)$ и равенство (3) принимает вид:

$$f(x_0)=q(x_0).$$

Это означает, что $x=x_0$ — корень уравнения (1).

Если $f(x_0)<0$, $q(x_0)<0$, то $\left|f(x_0)\right|=-f(x_0)$, $\left|q(x_0)\right|=-q(x_0)$ и равенство (3) принимает вид: $-f(x_0)=-q(x_0)$ или $f(x_0)=q(x_0)$. Значит, и в этом случае $x=x_0$ — корень уравнения (1).

Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны.

Замечание 3. Из доказанной теоремы следует, что если обе части уравнения при всех допустимых значениях x не имеют одинаковые знаки, то, возведя обе части уравнения в чётную степень, получим уравнение, не равносильное данному.

Доказанную теорему и замечание 3 следует иметь в виду при решении иррациональных уравнений.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x+8}=4-x$.

Решение

Способ 1

$$\sqrt{x+8}=4-x \;\Rightarrow\; x+8=16-8x+x^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2-9x+8=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=8. \end{array}\right.$$

Проверка

При $x=1$ из данного уравнения получим: $\sqrt{9}=3$ — верно. Значит, $x=1$ — корень.

При $x=8$ из данного уравнения получим: $\sqrt{16}=-4$, $4=-4$ — неверно. Значит, $x=8$ — посторонний корень.

Способ 2

$$\sqrt{x+8}=4-x \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+8=(4-x)^2, \\ 4-x\ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-9x+8=0, \\ x\le 4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=8, \end{array}\right. \\ x\le 4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x=1.$$

Ответ. 1.

Примечание. Объясним переход к равносильной системе. Данное уравнение — это уравнение вида $\sqrt{f(x)}=q(x)$. Оно равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=\left(q(x)\right)^2, \\ f(x)\ge 0, \\ q(x)\ge 0. \end{cases}$$

Но поскольку арифметический квадратный корень определён на множестве неотрицательных чисел и принимает неотрицательные значения, то условие $f(x)\ge 0$ является избыточным. Следовательно,

$$\sqrt{f(x)}=q(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)=\left(q(x)\right)^2, \\ q(x)\ge 0. \end{cases}$$

Замечание 4. Иногда учащиеся пытаются проверить найденные корни, подставляя их в область допустимых значений иррационального уравнения, что может привести к включению в число решений посторонних корней. Ведь под ОДЗ уравнения понимают множество значений переменной, при которых обе части уравнения имеют смысл, а не выполнение равенства.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{5-x}=3x-1$.

Решение

ОДЗ: $5-x\ge 0$, $x\le 5$.

Имеем:

$$\sqrt{5-x}=3x-1 \;\Rightarrow\; 5-x=(3x-1)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 9x^2-5x-4=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-\dfrac{4}{9}. \end{array}\right.$$

Оба корня входят в ОДЗ уравнения, то есть принадлежат промежутку $(-\infty;5]$. Но данному уравнению удовлетворяет корень $x=1$; корень $x=-\frac{4}{9}$ — посторонний (проверьте!). Откуда же появился посторонний корень? Дело в том, что при таком способе решения необходимо учитывать не только ОДЗ уравнения, но и область значений арифметического корня, то есть должно выполняться условие: $3x-1\ge 0$. Корень $x=-\frac{4}{9}$ этому условию не удовлетворяет.

III. Переход от логарифмического уравнения к алгебраическому (метод потенцирования)

Решать логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x)=\log_a q(x) \qquad (1)$$

можно с использованием: 1) уравнений следствий; 2) равносильных преобразований.

1) $\log_a f(x)=\log_a q(x) \;\Rightarrow\; f(x)=q(x)$. Далее решаем последнее уравнение, а затем проверяем полученные корни подстановкой в исходное уравнение.

2) $\log_a f(x)=\log_a q(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x)=q(x), \\ f(x)>0, \\ q(x)>0, \end{cases}$ что равносильно

$$\begin{cases} f(x)=q(x), \\ f(x)>0, \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$\begin{cases} f(x)=q(x), \\ q(x)>0. \end{cases} \qquad (3)$$

Обычно условие «больше нуля» накладывают на одну из функций $f(x)$ или $q(x)$ (см. (2) и (3)), которая выглядит «проще» (в зависимости от этого уравнение (1) заменяют одной из равносильных систем (2), (3)).

Если в уравнении (1) основание логарифма — постоянную a — заменить функцией $f(x)$, то получим уравнение

$$\log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} q(x). \qquad (4)$$

Уравнение (4) равносильно смешанной системе:

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} q(x) \iff \begin{cases} f(x) = q(x), \\ f(x) > 0, \\ q(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} f(x) = q(x), \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases} f(x) = q(x), \\ q(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Пример 10. Решить уравнение

$$\log_{0,5}(2x^2 - x) = \log_{0,5} x^2.$$

Решение

Способ 1

Имеем:

$$\log_{0,5}(2x^2 - x) = \log_{0,5} x^2 \Rightarrow 2x^2 - x = x^2 \iff$$

$$\iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Проверка

При $x = 0$ из данного уравнения получим: $\log_{0,5} 0 = \log_{0,5} 0$ — равенство невозможно. Значит, $x = 0$ — посторонний корень.

При $x = 1$ из данного уравнения получим: $\log_{0,5} 1 = \log_{0,5} 1$, $0 = 0$ — верно. Значит, $x = 1$ — корень.

Способ 2

У нас $f(x) = 2x^2 - x$, $q(x) = x^2$. Согласно (3), имеем:

$$\log_{0,5}(2x^2 - x) = \log_{0,5} x^2 \iff \begin{cases} 2x^2 - x = x^2, \\ x^2 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ x^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x = 1.$$

Ответ. 1.

Пример 11. Решить уравнение

$$\log_{3x^2-2x-1}(2x^2 - x + 1) = \log_{3x^2-2x-1}(x+1).$$

Решение

Способ 1

$$\log_{3x^2-2x-1}(2x^2 - x + 1) = \log_{3x^2-2x-1}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 1 = x + 1 \iff x^2 - x = 0 \iff$$

$$\iff x(x-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Проверка

При $x = 0$ из данного уравнения получим: $\log_{-1} 1 = \log_{-1} 1$ — равенство невозможно (основание логарифма равно -1). Значит, $x = 0$ — посторонний корень.

При $x = 1$ из данного уравнения получим: $\log_0 2 = \log_0 2$ — равенство невозможно (основание логарифма равно 0). Значит, $x = 1$ — посторонний корень.

Способ 2

$$f(x) = 2x^2 - x + 1,\ q(x) = x + 1,$$

$$h(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Согласно (6) имеем:

$$\log_{3x^2-2x-1}(2x^2 - x + 1) = \log_{3x^2-2x-1}(x+1) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = x + 1, \\ x + 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 \neq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ x > -1, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x - 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 \end{array}\right. \\ x > -1, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 2x - 2 \neq 0. \end{cases}$$

Система решений не имеет, значит, не имеет корней и данное уравнение.

Ответ. Корней нет.

Литература

1. *Алгебра* и начала анализа : учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; под ред. А. Н. Колмогорова. — 14-е изд. — М. : Просвещение, 2004. — 384 с. : ил.
2. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1988.
3. *Система* тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. — М. : Просвещение, 1991. — 208 с. : ил.
4. *Готовимся* к единому государственному экзамену. Математика / Л. Д. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков и др. — М. : Дрофа, 2004. — 120 с.
5. *Сефибеков С. Р.* Внеклассная работа по математике: Кн. для учителя: Из опыта работы. — М. : Просвещение, 1988. — 79 с. : ил.

ТЕМА 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Алгоритм — это точное предписание, которое задаёт вычислительный процесс (называемый алгоритмическим), начинающийся с произвольного исходного данного (некоторой совокупности возможных для данного алгоритма исходных данных) и направленный на получение полностью определённого этим исходным данным результата [1].

Алгоритмами являются, например, известные из школьных учебников математики правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком, правила решения уравнений и неравенств и их систем и т. д.

Алгоритмы встречаются в науке на каждом шагу: умение решать задачу «в общем виде» всегда означает, по существу, владение некоторым алгоритмом. Говоря, например, об умении человека умножать числа, имеют в виду, что он для любых двух чисел рано или поздно сумеет найти их произведение, то есть, что он владеет некоторым единообразным приёмом умножения, применяемым к любым двум конкретным записям чисел, — алгоритмом умножения (примером такого алгоритма и является известное правило умножения чисел столбиком).

Итак, теперь приведём несколько примеров использования различных алгоритмов при решении задач.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Пример 1. Решите уравнение:

1) $(x+3)^4+(x+5)^4=16;$

2) $\left(\frac{1}{x+2}\right)^2+\left(\frac{1}{x+3}\right)^2=3.$

Решение

1) Преобразуем заданное уравнение следующим образом (выделим полный квадрат разности):

$$\left((x+3)^2\right)^2+\left((x+5)^2\right)^2-2(x+3)^2(x+5)^2=$$
$$=16-2(x+3)^2(x+5)^2,$$
$$\left((x+3)^2-(x+5)^2\right)^2=16-2\left(x^2+8x+15\right)^2,$$
$$16(x+4)^2=16-2\left((x+4)^2-1\right)^2,$$
$$8(x+4)^2=8-\left((x+4)^2-1\right)^2.$$

Пусть $(x+4)^2=t,\ \ t\geq 0$. Тогда получим:

$$8t=8-(t-1)^2,\ \ t^2+6t-7=0,$$

откуда $t_1=1,\ \ t_2=-7$ — не удовлетворяет условию $t\geq 0$.

Тогда $(x+4)^2=1,\ \ |x+4|=1$, откуда

$$x_1=-5,\ \ x_2=-3.$$

Ответ. $-5;\ \ -3.$

2) Преобразуем заданное уравнение следующим образом (выделим полный квадрат разности):

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^2+\left(\frac{1}{x+3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}=3-2\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3},$$
$$\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)^2=3-2\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3},$$
$$\left(\frac{1}{x^2+5x+6}\right)^2=3-2\cdot\frac{1}{x^2+5x+6}.$$

Пусть

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=t,$$

тогда имеем:

$$t^2=3-2t,\ \ t^2+2t+1=4,\ \ (t+1)^2=4,\ \ |t+1|=2,$$

откуда $t_1=-3,\ \ t_2=1.$

Теперь задача свелась к решению совокупности двух уравнений:

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=-3,\ \ \frac{1}{x^2+5x+6}=1.$$

Из первого уравнения имеем:

$$3x^2+15x+19=0,$$

$D=15^2-4\cdot3\cdot19=-3<0$ — корней нет.

Из второго уравнения имеем: $x^2+5x+5=0$, откуда

$$x_1=-\frac{\sqrt{5}+5}{2},\ \ x_2=\frac{\sqrt{5}-5}{2}.$$

Ответ. $-\frac{\sqrt{5}+5}{2};\ \frac{\sqrt{5}-5}{2}.$

Пример 2. Решите неравенство:

1) $|x^2+5x|<6$;

2) $|2x^2-9x+15|\ge 2$;

3) $x^2-|5x+6|>0$;

4) $\dfrac{|x^2-2|-x}{|x^2-2|+x}<0$;

5) $\sqrt{x^2+6x+10}\le \sin^2 y$.

Решение

1) $|x^2+5x|<6$,

$$-6<x^2+5x<6.$$

Выделим полный квадрат, получим:

$$-6<\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}<6,\ \frac{1}{4}<\left(x+\frac{5}{2}\right)^2<\frac{49}{4},$$

$$\frac{1}{2}<\left|x+\frac{5}{2}\right|<\frac{7}{2}.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\left|x+\dfrac{5}{2}\right|>\dfrac{1}{2},\\ \left|x+\dfrac{5}{2}\right|<\dfrac{7}{2},\end{cases}$$

решая которую, получим:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{5}{2}<-\dfrac{1}{2},\\ x+\dfrac{5}{2}>\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ -\dfrac{7}{2}<x+\dfrac{5}{2}<\dfrac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>-2,\end{array}\right.\\ -6<x<1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\ -6<x<1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>-2,\\ -6<x<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-6<x<-3,\\ -2<x<1.\end{array}\right.$$

Таким образом, решение заданного неравенства: $x\in(-6;-3)\cup(-2;1)$.

Ответ. $(-6;-3)\cup(-2;1)$.

2) Неравенство $|2x^2-9x+15|\ge 2$ равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-9x+15\le -2,\\ 2x^2-9x+15\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-9x+17\le 0,\\ 2x^2-9x+13\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{17}{2}\le 0,\\ x^2-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{13}{2}\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{81}{16}+\dfrac{17}{2}\le 0,\\ \left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{81}{16}+\dfrac{13}{2}\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{55}{16}\le 0, & (1)\\ \left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{23}{16}\ge 0. & (2)\end{array}\right.$$

Так как

$$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2\ge 0,$$

то неравенство (1) не выполняется, а неравенство (2) справедливо при любом значении x.

Таким образом, решение заданного неравенства: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;+\infty)$.

3) Так как

$$|5x+6|=\begin{cases}5x+6,\ \text{если } 5x+6\ge 0,\ x\ge -1{,}2,\\ -(5x+6),\ \text{если } 5x+6<0,\ x<1{,}2,\end{cases}$$

то если $x\ge -1{,}2$, имеем: $x^2-5x-6>0$,

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-6>0,\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2>\frac{49}{4}$$

и далее

$$\left|x-\frac{5}{2}\right|>\frac{7}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\dfrac{5}{2}<-\dfrac{7}{2},\\ x-\dfrac{5}{2}>\dfrac{7}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x>6.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $x\ge -1{,}2$, получим, что

$$x\in[-1{,}2;-1)\cup(6;+\infty).$$

Если $x<-1{,}2$, то имеем: $x^2+5x+6>0$,

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6>0,\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2>\frac{1}{4}$$

и далее

$$\left|x+\frac{5}{2}\right|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{5}{2}<-\dfrac{1}{2},\\ x+\dfrac{5}{2}>\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ x>-2.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $x<-1{,}2$, получим, что

$$x\in(-\infty;-3)\cup(-2;-1{,}2).$$

Таким образом, решение заданного неравенства: $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(6;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(6;+\infty)$.

4) Заданное неравенство равносильно неравенству

$$\left(|x^2-2|-x\right)\left(|x^2-2|+x\right)<0,$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\left(x^2-2\right)^2-x^2<0,\ \text{или}\ x^4-5x^2+4<0.$$

Пусть $x^2 = y$, $y > 0$ (если $y = 0$, то $x = 0$ и получим: $4 < 0$, что ложно). Тогда

$$y^2 - 5y + 4 < 0,\ \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 < 0,\ \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{9}{4},$$

откуда

$$\left|y - \frac{5}{2}\right| < \frac{3}{2},\ \text{или}\ -\frac{3}{2} < y - \frac{5}{2} < \frac{3}{2},\ 1 < y < 4.$$

Тогда $1 < x^2 < 4$. Далее имеем:

$$1 < |x| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1, \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1, \end{array}\right. \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -2 < x < 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ -2 < x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ 1 < x < 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, решение заданного неравенства: $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

5) Так как

$$\sqrt{x^2 + 6x + 10} = \sqrt{(x+3)^2 + 1} \ge 1 \ \text{и}\ 0 \le \sin^2 y \le 1,$$

то заданное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 10} = 1, \\ \sin^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ \left[\begin{array}{l} \sin y = -1, \\ \sin y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-3; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(-3; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{2x^2 + ax + 5}{x^2 - x + 1} > 1$$

выполняется при любом x?

Решение

Так как

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

то данное неравенство равносильно неравенству

$$2x^2 + ax + 5 > x^2 - x + 1,\ \text{или}\ x^2 + (a+1)x + 4 > 0.$$

Это неравенство выполняется при всех x при условии, что $D = (a+1)^2 - 16 < 0$ (где D — дискриминант), откуда

$$(a+1)^2 < 16,\ |a+1| < 4,$$

$$-4 < a + 1 < 4,\ \text{или}\ -5 < a < 3.$$

Ответ. При $-5 < a < 3$.

БИНОМ НЬЮТОНА И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Двучлен $a + b$ называют также биномом.

Биномом Ньютона называют формулу, выражающую любую целую положительную степень суммы двух слагаемых (бинома) через степени этих слагаемых, а именно:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

где n — целое положительное число, a и b — какие угодно числа.

Из школьного курса алгебры 7 класса известны следующие формулы:

$$(a \pm b)^1 = a \pm b, \quad (1)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^2 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \quad (3)$$

Как можно получить формулы для $(a \pm b)^n$, когда $n \ge 4$?

Пусть $n = 4$. Тогда

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right),$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Используя эту формулу, получим разложение для $(a-b)^4$:

$$(a-b)^4 = (a + (-b))^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Объединив последние две формулы в одну, получим:

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4. \quad (4)$$

Аналогично можно получить формулы и для $n = 5, 6, \ldots$

Рассматривая формулы (1) – (4), составим следующую таблицу (в виде равнобедренного треугольника) модулей коэффициентов при буквенных выражениях в правых частях формул (эти коэффициенты называют биномиальными), записав в первой строке 1:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array} \qquad (*)
$$

Заметим, что в первой строке треугольника (*) — число 1, каждая следующая строка начинается и заканчивается единицей. Каждое из остальных чисел этого треугольника получается сложением двух чисел, расположенных выше него. Например, если вторая строка написана, то для написания третьей строки нужно на первом месте записать 1, на втором — сумму двух чисел второй строки $2=1+1$, а на третьем — снова 1. Запишем теперь четвёртую строку: на первом месте — 1, на втором — сумму двух первых чисел третьей строки $3=1+2$, на третьем — сумму второго и третьего чисел третьей строки $3=2+1$, а на четвёртом — 1.

Аналогично, в пятой строке на первом месте запишем 1, а затем последовательно $4=1+3$, $6=3+3$, $4=3+1$ и 1 — в конце строки.

Продолжим таблицу (*), записав шестую и седьмую строки:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Таким образом, в шестой и седьмой строках таблицы написаны модули коэффициентов разложения биномов $(a\pm b)^5$ и $(a\pm b)^6$:

$$(a\pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b+10a^3b^2 \pm 10a^2b^3+5ab^4 \pm b^5,$$

$$(a\pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b+15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + $$
$$+15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6.$$

(Обратим внимание на то, что показатели степеней a убывают (например, для $(a\pm b)^5$ — 5, 4, 3, 2, 1, 0), а показатели степеней b возрастают (0, 1, 2, 3, 4, 5)).

Таким образом, в строке треугольника (*) с номером $n+1$ записаны модули коэффициентов разложения биномов $(a\pm b)^n$.

Составленная по такому принципу числовая треугольная таблица известна в математике как *китайский треугольник*. Позже он был назван *треугольником Паскаля* в честь французского математика Блеза Паскаля (1623–1662), который использовал треугольник в «Трактате об арифметическом треугольнике (1654, опубл. 1665). Это привлекло внимание математиков к треугольнику и сыграло важную роль в развитии комбинаторики.

Пример 4. Решите уравнение

$$(x+3)^4+(x+5)^4=16$$

(см. пример 1, 1)), воспользовавшись треугольником Паскаля.

Решение

Положим

$$t=\frac{(x+3)+(x+5)}{2}=x+4.$$

Тогда $x=t-4$ и уравнение принимает вид:

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16.$$

Теперь воспользуемся пятой строкой треугольника (*), получим:

$$(t+1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1,$$

$$(t-1)^4=t^4-4t^3+6t^2-4t+1.$$

Сложим почленно левые и правые части этих равенств:

$$(t-1)^4+(t+1)^4=2t^4+12t^2+2.$$

Далее имеем:

$$2t^4+12t^2+2=16, \text{ или } t^4+6t^2-7=0,$$

откуда $t_1=-1$, $t_2=1$.

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений: $x+4=-1$, $x+4=1$.

Из первого уравнения $x_1=-5$, а из второго — $x_2=-3$.

Ответ. -5; -3.

Следующий пример предлагаем читателям решить самостоятельно.

Пример 5. Решите уравнение

$$(4+x)^5-(x-2)^5=1056.$$

(*Ответ.* -2; 0.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАВЕНСТВ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Пример 6. На основании равенства

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

составьте систему трёх уравнений с тремя неизвестными.

Решение

Прежде всего докажем, что данное равенство равносильно системе

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

Действительно, при $x=y=z=1$ равенство выполняется. Если же $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$, то $(x-1)^2>0$, $(y-1)^2>0$, $(z-1)^2>0$ и

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>0.$$

Так как

$$(x-1)^2=x^2-2x+1,\ (y-1)^2=y^2-2y+1,$$

$$(z-1)^2=z^2-2z+1,$$

то можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y^2-2x+1=0, \\ z^2-2y+1=0. \end{cases}$$

Решим эту систему. Почленно сложив равенства, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y^2-2x+1=0, \\ z^2-2y+1=0, \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0, \end{cases}$$

откуда $x=y=z=1$.

Пример 7. На основании равенства

$$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0$$

составьте систему трёх уравнений с тремя неизвестными.

Решение

Так как

$$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1,\ (y-1)^3=y^3-3y^2+3y-1,$$

$$(z-1)^3=z^3-3z^2+3z-1,$$

то можно составить систему:

$$\begin{cases} x^3-3z^2+3z-1=0, \\ y^3-3x^2+3x-1=0, \\ z^3-3y^2+3y-1=0. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений. Она равносильна системе

$$\begin{cases} x^3=3z^2-3z+1, & (1) \\ y^3=3x^2-3x+1, & (2) \\ z^3=3y^2-3y+1, & (3) \\ (x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0. & (4) \end{cases}$$

Из равенства (4) очевидно, что $x=y=z=1$ — решение системы (проверьте!).

Докажем, что других решений эта система не имеет. Рассмотрим функцию

$$f(t)=3t^2-3t+1>0$$

(так как в квадратном трёхчлене $3t^2-3t+1$ первый коэффициент $a=3>0$ и дискриминант $D=-3<0$). Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x^3=f(z)>0, \\ y^3=f(x)>0, \\ z^3=f(y)>0, \\ (x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ z>0. \end{cases}$$

Одно решение $x=y=z=1$ мы уже имеем.

Пусть $x>1$. Тогда $x^3>1$ и из (1) получим:

$$3z^2-3z+1>1,\ 3z^2-3z>0,\ z^2-z>0,\ (z-1)z>0.$$

Последнее неравенство равносильно неравенство $z-1>0$ (так как $z>0$), или $z>1$.

Аналогично при $z>1$ $z^3>1$ и из (3) получим:

$$3y^2-3y+1>1,\ 3y^2-3y>0,\ y^2-y>0,\ y(y-1)>0.$$

Последнее неравенство равносильно $y-1>0$ (так как $y>0$), или $y>1$.

Отсюда при $x>1$, $y>1$, $z>1$ имеем:

$$\begin{cases} (x-1)^3>0, \\ (y-1)^3>0, \\ (z-1)^3>0, \end{cases}$$

что равносильно неравенству

$$(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3>0,$$

то есть равенство (4) не выполняется. Следовательно, других решений в области, где $x>1$, $y>1$, $z>1$, нет.

Пусть $0<x<1$. Тогда $0<x^3<1$ и (см. (1))

$$0<3z^2-3z+1<1,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} 3z^2-3z+1>0, \\ 3z^2-3z+1<1, \end{cases}$$

откуда $3z^2-3z<0$, $z(z-1)<0$, $z-1<0$ (так как $z>0$), $0<z<1$.

При $0<z<1$ $0<z^3<1$ и (см. (3))

$$0<3y^2-3y+1<1.$$

Отсюда аналогично получим: $0<y<1$.

Тогда имеем:

$$\begin{cases}0<x<1,\\0<y<1,\\0<z<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x-1<0,\\-1<y-1<0,\\-1<z-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<(x-1)^3<0,\\-1<(y-1)^3<0,\\-1<(z-1)^3<0,\end{cases}$$

откуда $-3<(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3<0$ — равенство (4) не выполняется.

Значит, в области, где

$$0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1,$$

решений также нет.

Ответ. $(1;1;1)$.

ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ИЗ НЕПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

Пример 8. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x+2}$;

2) $\dfrac{x^8+2x^7+x^6+x^5+2x^4+6x^3+6x^2-2x-3}{x^5+x^3+2x+3}=1-x^2$.

Решение

1) $\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x+2}$.

ОДЗ: $x\neq-3,\quad x\neq1$.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{(x^2+2x-3)+1}{x^2+2x-3}=\frac{(x^2+x+2)+1}{x^2+x+2},$$

$$1+\frac{1}{x^2+2x-3}=1+\frac{1}{x^2+x+2},$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x^2+x+2}.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$x^2+2x-3=x^2+x+2,$$

откуда $x=5$.

Ответ. 5.

2) $\dfrac{x^8+2x^7+x^6+x^5+2x^4+6x^3+6x^2-2x-3}{x^5+x^3+2x+3}=1-x^2$.

ОДЗ уравнения найдём из условия

$$x^5+x^3+2x+3\neq0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=x^5+x^3+2x+3.$$

Так как

$$f'(x)=5x^4+3x^2+2>0$$

при всех $x\in\mathbb{R}$, то функция $f(x)$ возрастающая на множестве $\mathbb{R}$. Заметим, что

$$f(-1)=-1<0 \text{ и } f(0)=3>0.$$

Тогда $f(x_0)=0$, где $x_0\in(-1;0)$. Значит, ОДЗ уравнения — все действительные числа x, кроме x_0 $(x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\})$.

Разделим числитель дроби в левой части уравнения на её знаменатель.

$$\begin{array}{r|l}
x^8+2x^7+x^6+x^5+2x^4+6x^3+6x^2-2x-3 & x^5+x^3+2x+3\\ \cline{2-2}
-\underline{x^8+x^6+2x^4+3x^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & x^3+2x^2-1\\
2x^7+x^5+3x^3+6x^2 \qquad\qquad\quad & \\
-\underline{2x^7+2x^5+4x^3+6x^2} \qquad\qquad\quad & \\
-x^5-x^3-2x-3 & \\
-\underline{-x^5-x^3-2x-3} & \\
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Таким образом, заданное уравнение приводится к виду:

$$x^3+2x^2-1=1-x^2,\ \text{или}\ x^3+3x^2-2=0.$$

Заметим, что $x=-1$ — корень полученного уравнения.

Воспользуемся тем, что многочлен

$$x^3+3x^2-2$$

делится без остатка на $x+1$. Выполним это деление:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-2 \qquad & x+1\\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2} \qquad\qquad & x^2+2x-2\\
2x^2-2 \quad & \\
-\underline{2x^2+2x} \quad & \\
-2x-2 & \\
-\underline{-2x-2} & \\
0 \quad &
\end{array}$$

Таким образом, имеем уравнение

$$(x^2+2x-2)(x+1)=0.$$

Решая уравнение

$$x^2+2x-2=0,$$

получим

$$x_1=-\sqrt{3}-1,\ x_2=\sqrt{3}-1.$$

Числа $-\sqrt{3}-1$, -1, $\sqrt{3}-1$ входят в ОДЗ.

Ответ. $-\sqrt{3}-1;\ -1;\ \sqrt{3}-1$.

Литература

1. *Математическая* энциклопедия / Глав. ред. И. М. Виноградов — М. : Советская энциклопедия, 1977.
2. *Математический* энциклопедический словарь / Глав. ред. Ю. В. Прохоров. — М. : Советская энциклопедия, 1988.

ТЕМА 6. КЛЮЧ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ –ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ФИГУРЫ К ДРУГОЙ

Человеческий ум открывает и познаёт сначала конкретное, из чего он впоследствии развивает общее. Переход от конкретного к общему является естественным ходом развития, и обучение учащихся в школе должно придерживаться этого пути.

С. Р. Сефибеков

Приём перехода от одной фигуры к другой облегчает решение сложной геометрической задачи, а также способствует переоткрытию известных теорем. Покажем это на примерах.

Рассмотрим следующую геометрическую задачу.

Задача. К двум касающимся извне окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие касательные l_1 и l_2; A, B, C, D и E — точки касания (*рис. 1*). Если прямые AC и BD проходят через точку E, то $\omega_1 = \omega_2$. Докажите.

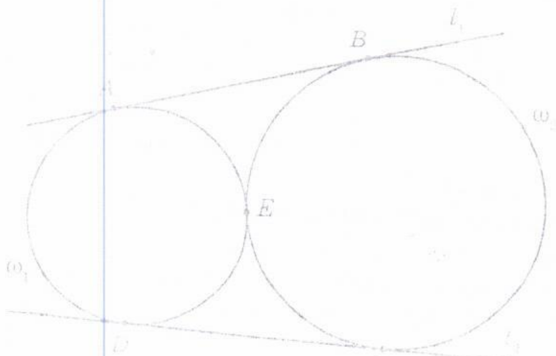


Рис. 1

Доказательство

Пусть прямые AC и BD проходят через точку E и $\omega_1 \neq \omega_2$ (*рис. 2*). Обозначим точку пересечения касательных l_1 и l_2 через T, центры окружностей — через O_1 и O_2. Точки O_1 и O_2 равноудалены от сторон угла BTC, поэтому они лежат на биссектрисе TT_1 этого угла.

Докажем, что наше допущение неверно, то есть докажем, что $ABCD$ — квадрат, и тогда

$$AB \parallel DC,\ \omega_1 = \omega_2.$$

Доказательство проведём по схеме (указывая на последовательное превращение четырёхугольника в квадрат): $ABCD \to$ равнобокая трапеция $\to$ $\to$ прямоугольник $\to$ квадрат.

По свойству касательных

$$AT = DT,\ BT = CT.$$

Тогда $AB = DC$. В равнобедренных треугольниках ATD и BTC $TT_1 \perp AD$, $TT_1 \perp BC$. Тогда $AD \parallel BC$. Отсюда $ABCD$ — равнобокая трапеция и $AC = BD$.

Пусть l_3 — общая касательная к окружностям ω_1 и ω_2 в точке E, M и N — точки её пересечения с касательными l_1 и l_2. Тогда $l_3 \perp O_1O_2$. Отсюда $MN \parallel AD$ (и $MN \parallel BC$). С другой стороны, по свойству касательных

$$MA = MB = ME,$$

то есть точка M — середина AB. Аналогично точка N — середина DC.

Таким образом, MN — средняя линия трапеции $ABCD$. По теореме Фалеса из треугольника ABC точка E — середина AC, из треугольника BDC точка E — середина BD. Тогда у равнобокой трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD точкой их пересечения E делятся пополам. Значит, $ABCD$ — прямоугольник.

Заметим, что окружность диаметра AB проходит через точку E. Тогда

$$\angle AEB = 90^\circ \text{ и } AC \perp BD.$$

Но прямоугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями есть квадрат, что и требовалось доказать.

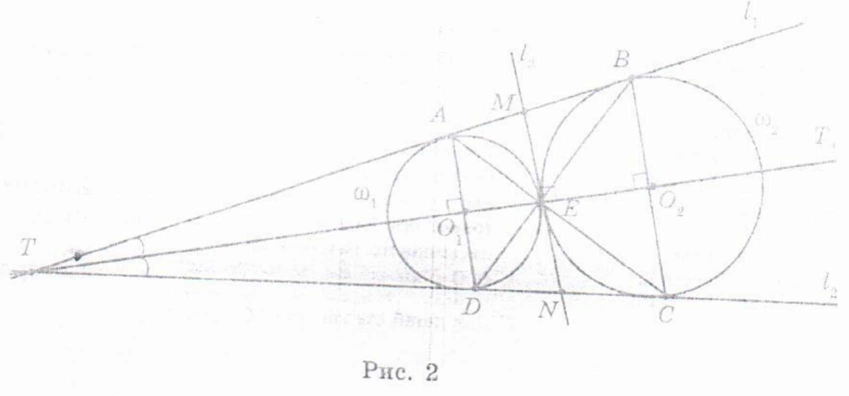


Рис. 2

Открытие теоремы индийского математика Брахмагупты (598–660) [1]

Вспомогательная задача 1. В прямоугольном треугольнике AOD на гипотенузе AD отмечена точка M так, что

$$\angle MOD = \angle MDO.$$

Докажите, что

$$AM = DM.$$

Доказательство

Поскольку по условию

$$\angle MOD = \angle MDO,$$

то треугольник MOD равнобедренный:

$$OM = DM.$$

Опишем около треугольника AOD окружность с центром E (точка E — середина гипотенузы AB) (*рис. 3*).

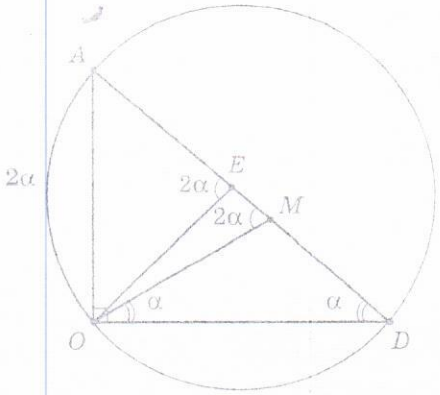


Рис. 3

Тогда

$$OE = AE = DE$$

как радиусы одной окружности. Пусть

$$\angle MOD = \angle MDO = \alpha.$$

Тогда $\angle AMO = 2\alpha$ как внешний угол треугольника MOD. С другой стороны, угол ODA — вписанный в окружность и опирающийся на дугу AO,

$$\smile AO = 2\angle ODA = 2\alpha.$$

Поскольку $\angle AMO = 2\alpha$ и угол AMO опирается на дугу $\smile AO = 2\alpha$, то угол AMO — центральный угол окружности. Поэтому

$$E \equiv M \text{ и } AM = DM,$$

что и требовалось доказать.

Вспомогательная задача 2. Внутри круга построен прямоугольный треугольник AOD с гипотенузой AD, вершины A и D принадлежат окружности круга (*рис. 4*). На AD взята точка M так, что $DM = OM$. Отрезки DO и AO продолжены до пересечения с окружностью в точках B и C, а отрезок OM продолжен до пересечения с хордой BC в точке N. Докажите, что

$$MN \perp BC.$$

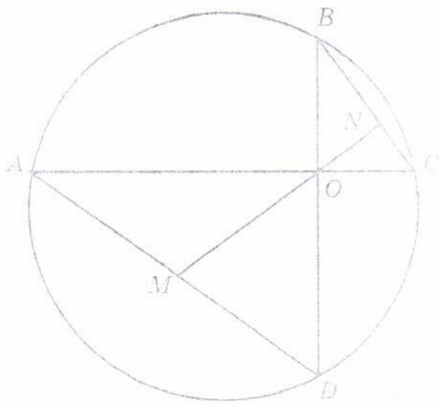


Рис. 4

Доказательство

По задаче 1:

$$AM = DM = OM,$$

треугольник MOD — равнобедренный

$$(\angle MOD = \angle MDO = \alpha).$$

Далее,

$$\angle BON = \angle MOD = \alpha$$

как вертикальные и

$$\angle DAC = \angle DBC = \beta$$

как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу DC (*рис. 5*).

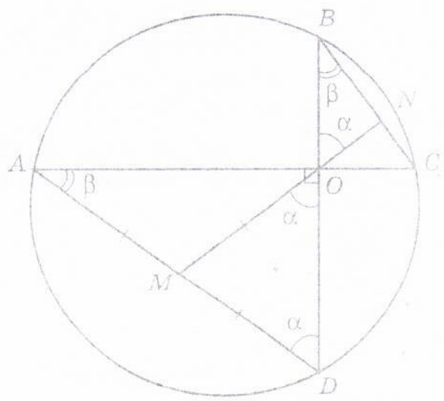


Рис. 5

Из треугольника AOD:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Из треугольника BON:

$$\angle ONB = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°.$$

Значит, $MN \perp BC$, что и требовалось доказать.

Решённые нами задачи 1 и 2 резюмируем в виде следующей теоремы.

Теорема Брахмагупты. Пусть имеется вписанный четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Опустим из точки пересечения диагоналей перпендикуляр на одну из его сторон. Будучи продолженным по другую сторону от точки пересечения диагоналей, этот перпендикуляр делит противоположную сторону четырёхугольника на две равные части (*рис. 6*).

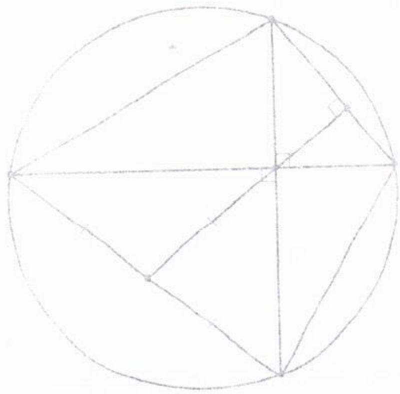


Рис. 6

Таким образом, нами переоткрыта историческая теорема.

Заметим, что представленный в данной статье материал способствует развитию математической деятельности, логического, творческого мышления, зрительной памяти (увидеть из рисунка, сопоставить, разобраться в комбинации фигур) учащихся; содействует развитию умений кратко излагать свои мысли в письменном виде; учит строгому доказательству в математических объектах, краткому изложению своих мыслей в письменном виде, терпению (чтобы добраться до «финиша»); показывает, как изученный ранее материал следует применить в рассуждениях; моделирует как бы решение научной проблемы элементарным путём (рассуждения ведутся от частного к общему (индуктивно), что важно для развития учащихся).

Литература

1. *Всеобщая* история изобретений и открытий. — М. : Эксмо, 2011. — С. 90.
2. *Погорелов А. В.* Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 224 с. : ил.

Отсюда и $MN_1 \to 0$ при $x \to \infty$ (так как $MN \to O$ при $x \to \infty$, $\alpha \to 0$ и $\cos\alpha \to 1$). Но $MN_1 = BN_1 - BM = (kx+b) - f(x)$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}((kx+b)-f(x)) = 0$ (1). Пользуясь правилами предельного перехода, из равенства (1) легко найти, что $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - k(x))$ (2).

Остановимся на одной логической ошибке при нахождении выражения для углового коэффициента k, часто встречающейся в математической литературе*: «... вынесем в равенстве (1) x за скобку и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right)\right)=0. \quad (3)$$

Отсюда при $x\to\infty$ следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right)=0, \quad (4)$$

или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(k-\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$, так как $\dfrac{b}{x}\to 0$ при $x\to\infty$.

Отсюда

$$k-\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

то есть

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Ответ является правильным, но в рассуждении допущена ошибка.

Установление ошибки.

Выше утверждается допустимость равенства (4), исходя из равенства (3). Но тогда (*см. (3)*)

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}-\frac{f(x)}{x}\right)=0$$

или

$$\infty\cdot 0=0. \quad (*)$$

Ведь операция умножения ∞ на число 0 лишена всякого смысла: ∞ не является числом и никаких операций над бесконечностью проводить нельзя! Следовательно, выражение $\infty\cdot 0$ является неопределённостью и равенство (*) невозможно. В этом ошибка!

Исправление ошибки

Введём обозначение:

$$\beta(x)=(kx+b)-f(x).$$

Тогда по равенству (1)

$$\lim_{x\to\infty}\beta(x)=0, \quad (5)$$

то есть функция $\beta(x)$ — бесконечно малая.

Рассмотрим функцию $\gamma(x)=\dfrac{1}{x}$.

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\gamma(x)=0, \quad (6)$$

то $\gamma(x)$ — бесконечно малая функция. Произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая, поэтому (*см. (5) и (6)*)

$$\lim_{x\to\infty}(\beta(x)\cdot\gamma(x))=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(((kx+b)-f(x))\cdot\frac{1}{x}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(k-\frac{f(x)}{x}\right)+\frac{b}{x}\right)=0,$$

или, учитывая, что при

$$x\to\infty \quad k\to k,\ \frac{b}{x}\to 0,$$

получим:

$$k-\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \quad (7)$$

Резюмируя всё изложенное (см. равенство (2) и (7)), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту

$$y=kx+b,$$

то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k(x)).$$

Верна и обратная теорема.

Теорема 2. Если существуют конечные пределы

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ и } b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k(x)),$$

то кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту

$$y=kx+b.$$

Если, в частности, $k=0$, то прямая $y=b$ будет горизонтальной асимптотой данной кривой.

* см., например, [2], с. 235

Наконец, рассмотрим случай вертикальной асимптоты. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид: $x = x_0$. Сближение кривой $y = f(x)$ с вертикальной прямой $x = x_0$ при бесконечном удалении точки от начала координат происходит в том случае, когда для кривой выполнено условие: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (*рис. 3*).

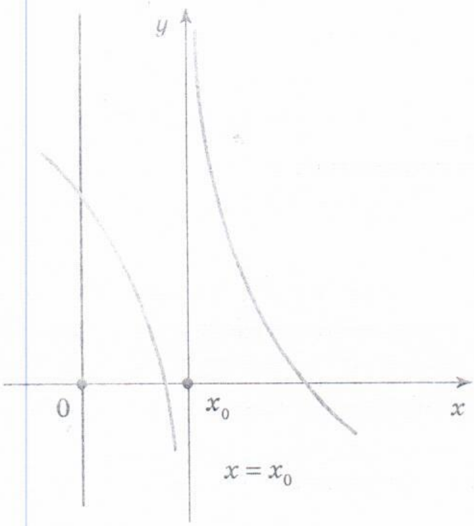


Рис. 3

Таким образом, для нахождения вертикальной асимптоты достаточно найти значение аргумента x, например, $x = x_0$, такое, что при $x \to x_0$ $f(x) \to \infty$.

Легко заметить, что если для дробной функции $y = f(x)$ $x = x_0$ есть корень знаменателя, то прямая $x = x_0$ её вертикальная асимптота.

В заключение рассмотрим пример на построение графика функции.

Построить график функции $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Решение.

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Так как $x = 0$ — корень знаменателя (точка разрыва функции), то прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.
   Найдём наклонную асимптоту (*см. теорему 1*):

$$k = \lim_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty}\left(\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) - 2x\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

и прямая $y = 2x$ — наклонная асимптота.

3. Определим критические точки:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = 0,$$

отсюда $x = 1$ — критическая точка.

4. Нанесём точки $x = 0$ и $x = 1$ на числовую ось x и изучим поведение функции на полученных интервалах (*см. рис. 4*а).

При $x \in (-\infty; 0)$,
если

$$x = -1, \text{ то}$$

$$f'(-1) = 2 - \frac{2}{(-1)^3} = 4 > 0$$

и $f(x)$ возрастает.

При $x \in (0; 1)$, если $x = 0{,}1$, то

$$f'(0{,}1) = 2 - \frac{2}{0{,}1} = -18 < 0$$

и $f(x)$ убывает.

При $x \in (1; +\infty)$, если $x = 2$, то

$$f'(2) = 2 - \frac{2}{2^3} = 1\frac{3}{4} > 0$$ и $f(x)$ возрастает.

Отсюда имеем, что точка $x = 1$ — точка минимума функции: $\min f(x) = f(1) = 3$.

5. Найдём дополнительные точки и построим график функции (*рис. 4б*).

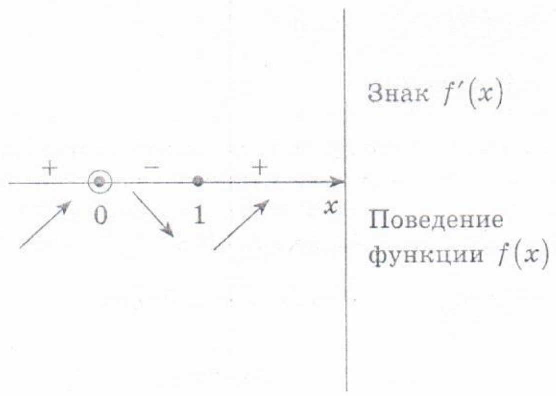
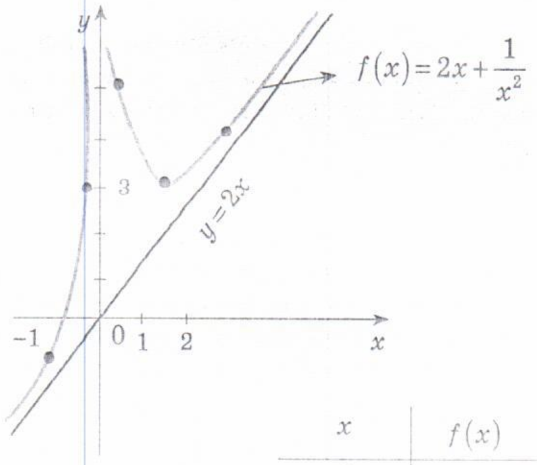


Рис. 4а



x	$f(x)$
2	$4\frac{1}{4}$
0,5	5
−1	−1
−0,5	3

Рис. 4б

Литература

1. *Алгебра* и начала математического анализа. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и углубленный уровни / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.]. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 463 с. : ил.
2. *Бермант А. Ф.* Курс математического анализа. Часть 1. 11-е изд. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.— 466 с. : ил.
3. *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики. — М. : 1968. 728 с. : ил.
4. *Сефибеков С. Р.* Внеклассная работа по математике: кн. для учителя / С. Р. Сефибеков. — М. : Просвещение, 1988. — 90 с.

ТЕМА 8. ВЗГЛЯД НА ДВА ВОПРОСА ГЕОМЕТРИИ СО СТОРОНЫ АНАЛИЗА

Для учителя математики не должно существовать границы между элементарной и высшей математикой.

С. Р. Сефибеков

Многолетний опыт работы в школе показывает, что один и тот же материал полезно предлагать на разных этапах обучения. Это даёт возможность повторить ранее изученный материал, способствует более глубокому и прочному овладению материалом, его систематизации, выяснению взаимных связей, сходства и различия с новым материалом.

Рассмотрим вопрос о том, как интеграл помогает вывести формулы для вычисления длины окружности и площадей поверхностей круглых тел.

I. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Нам понадобятся:

а) формула длины дуги окружности радиуса r в α радиан — $l=\alpha r$ (см. [1], с. 5);

б) правила предельного перехода (см. [1], с. 108). Здесь мы введём знак $\lim$. С его введением правила легко запоминаются. Например, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \ \lim_{x\to x_0} g(x)=B,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$

при условии $B\neq 0$;

в) первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(см. [1], с. 121).

2. Производная функции $y=\arcsin x$.

Докажем, что

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Имеем:

$$y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y.$$

По формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$x'=(\sin y)'=\cos y\cdot y',\ \text{или}\ 1=\cos y\cdot y',$$

откуда

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(перед корнем берём положительный знак, поскольку $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$).

Замечание. Приведённое доказательство нестрогое, поскольку мы вычисляли производную в предположении, что она существует.

3. Формула для нахождения площади боковой поверхности усечённого конуса:

$$S=\pi(R_1+R_2)l,$$

где R_1 и R_2 — радиусы оснований, l — образующая (см. [2], с. 126).

4. Уравнение прямой, не параллельной координатным осям и проходящей через две заданные точки $A_1(x_1;y_1)$ и $A_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Выведем (1). Общее уравнение прямой имеет вид:

$$y=kx+b. \qquad (2)$$

Поскольку прямая проходит через точку $A_1(x_1;y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2):

$$y_1=kx_1+b. \qquad (3)$$

Вычтем почленно (3) из (2), получим:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (4)$$

Для нахождения k используем то, что прямая проходит и через точку A_2 и, значит, числа x_2, y_2 должны удовлетворять уравнению (4). Имеем:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1),$$

откуда

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad (5)$$

где $x_2-x_1\neq 0$ (ведь $x_1\neq x_2$; аналогично $y_2-y_1\neq 0$).

2-2148

Подставив (5) в (4), получим уравнение (1).

5. Бесконечно малая функция.

Функцию $f(x)$ будем называть бесконечно малой, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \text{ (или } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0).$$

Например, функция $f(x)=\sqrt{x}$ бесконечно малая при $x\to 0$, т. к.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0.$$

6. Гладкость линии. Ответим на вопрос: «Существуют ли во всех точках линии касательные к ней?». Для прямой линии понятие «касательная» не существует. На *рис. 1 а)–е)* изображены графики функций $y=f(x)$.

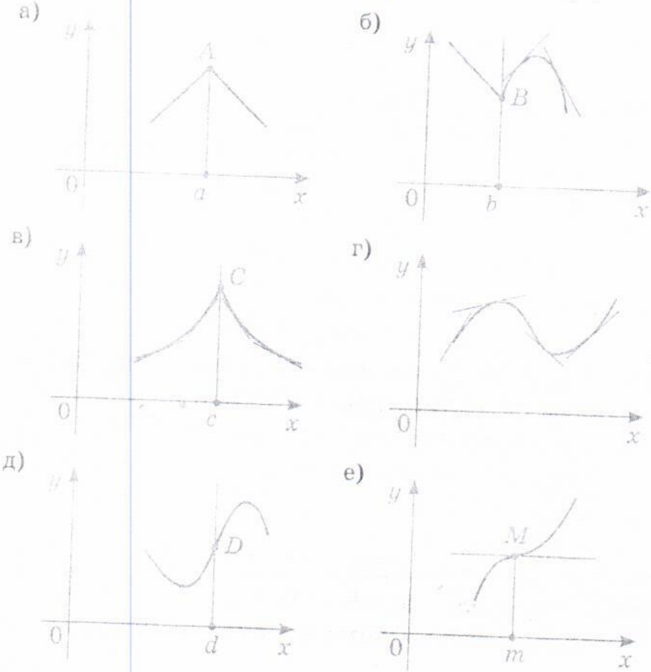


Рис. 1

На рис. 1 а) представлен единственный случай, когда касательная к линии в точке A не существует. (В этом случае линия является ломаной.) Тогда не существует и $f'(a)$.

График на рис. 1 б) состоит из отрезка и дуги кривой. Касательные существуют к дуге кривой.

Во всех остальных случаях (рис. 1 в)–е)) касательные существуют во всех точках линий. Касательные в точках B, C, D вертикальны и $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ не существуют; касательная в точке M горизонтальна и $f'(m)=0$ (вертикальные и горизонтальные касательные пересекаются с графиками).

На рис. 1 в) касательная в точке C скачком меняет своё направление.

Введём следующее определение.

Кривая называется гладкой, если в каждой её точке существует касательная, удовлетворяющая двум следующим условиям:

- ✓ она не меняет своего направления скачком;
- ✓ если она вертикальна, то не пересекает кривую.

Замечание. Прямую считают гладкой линией, ломаную — негладкой.

Линии на рис. 1 г) е) — гладкие, а на рис. 1 а) б) в) — негладкие (на рис. 1 б) не вся линия является кривой).

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма: Бесконечно малая дуга гладкой кривой эквивалентна своей хорде, то есть предел отношения их длин равен 1.

Вначале раскроем геометрический смысл этой леммы. Возьмём на гладкой кривой (*рис. 2*) две точки A и B и составим отношение длин дуги AB и хорды AB.

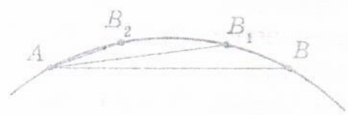


Рис. 2

Поскольку дуга длиннее хорды, то это отношение больше 1. На рис. 2

$$\frac{\cup AB}{AB}\approx 1{,}1.$$

Если точка B будет перемещаться и займёт положение B_1, то отношение длины дуги к длине хорды будет равно

$$\frac{\cup AB_1}{AB_1}\approx 1{,}09;$$

если займёт положение B_2 —

$$\frac{\cup AB_2}{AB_2}\approx 1{,}06.$$

Следовательно, при неограниченном приближении точки B к точке A отношение длины дуги AB к длине хорды AB стремится к 1, то есть

$$\lim_{B\to A}\frac{\cup AB}{AB}=1,$$

а это и означает, что дуга эквивалентна своей хорде.

Теперь докажем лемму. Поскольку в каждой точке гладкой кривой можно провести касательную к ней, то гладкую кривую можно делить на малые части, представляющие собой дуги окружностей (окружность — гладкая кривая, см. определение). На *рис. 3* гладкую кривую MN можно разделить на 5 таких частей — дуги MM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4N.

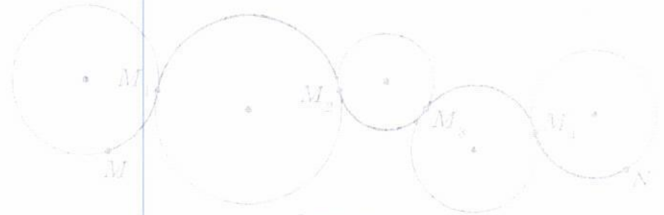


Рис. 3

Отсюда

$$\lim_{B \to A} \frac{\cup AB}{AB}$$

можно заменить на

$$\lim_{B \to A} \frac{l(\alpha)}{AB_\alpha},$$

где $l(\alpha)$ — длина дуги AB_α окружности радиуса r, соответствующей центральному углу α, и AB_α — длина хорды этой дуги (*рис. 4*).

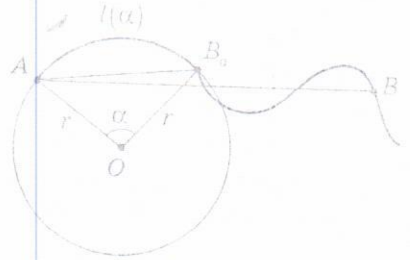


Рис. 4

Известно, что (см. п. 1 а)) $l_\alpha = \alpha r$, где α — радианная мера угла. Из треугольника OAB_α по теореме косинусов имеем:

$$AB_\alpha^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\alpha,$$

$$AB_\alpha = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\alpha} = \sqrt{2} \cdot r\sqrt{1 - \cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot r\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

поскольку

$$\sin\frac{\alpha}{2} > 0$$

($0° < \alpha < 360°$ и тогда $0° < \frac{\alpha}{2} < 180°$).

Тогда

$$\lim_{B \to A} \frac{\cup AB}{AB} = \lim_{B \to A} \frac{l(\alpha)}{AB_\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha r}{2r\sin\frac{\alpha}{2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{1} = 1,$$

поскольку при $\alpha \to 0$ и $\frac{\alpha}{2} \to 0$,

$$\lim_{\alpha \to 0} 1 = 1 \text{ и } \lim_{\frac{\alpha}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = 1$$

(см. п. 1 в)).

Лемма доказана.

II. ДЛИНА ДУГИ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Найдём длину l дуги гладкой кривой $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$ (*рис. 5*).

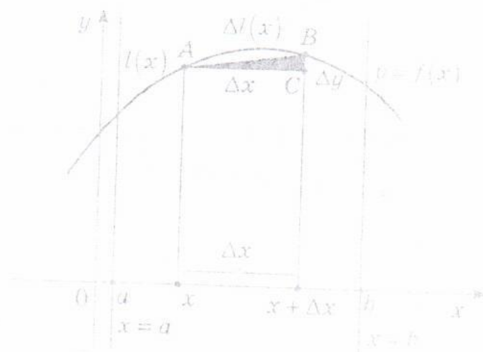


Рис. 5

Возьмём $x \in [a; b]$ и рассмотрим часть дуги, лежащую левее точки A. Длину этой дуги обозначим $l(x)$. Найдём производную этой функции. Чтобы не усложнять вычисления, приведём наглядную схему вычисления производной функции $l(x)$ на отрезке $[a; b]$ для случая $\Delta x > 0$.

Отрезок AB, соответствующий малому приращению аргумента Δx, обозначим через $\Delta l(x)$. Хорду AB этой дуги определим по теореме Пифагора из треугольника ABC:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Тогда в силу гладкости кривой по выше приведённой лемме имеем:

$$\lim_{B \to A} \frac{\cup AB}{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l(x)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 1,$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta l(x)}{\Delta x}}{\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}} = 1, \quad \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}} = 1,$$

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

то есть $l'(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$.

Таким образом, функция $l(x)$ есть первообразная для функции

$$\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

на отрезке $[a;b]$. Длину l дуги получим при $x=b$:

$$l=l(b).$$

Заметив, что $l(a)=0$, находим

$$l=l(b)-l(a),$$

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (6)$$

где $y'(x)=f'(x)$.

Задача 1. Найдите длину l дуги кривой

$$x^2+y^2=R^2.$$

Решение. Данная кривая — окружность радиуса R с центром в начале координат (*рис. 6*).

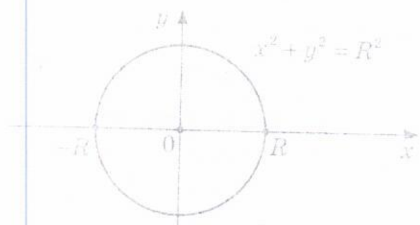


Рис. 6

Вначале найдём длину l_1 полуокружности, расположенной в первой и второй координатных четвертях. Заметив, что её уравнение — $y=\sqrt{R^2-x^2}$, по формуле (6) имеем:

$$l_1=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R}=\pi R.$$

Следовательно,

$$l=2l_1=2\pi R.$$

Ответ. $l=2\pi R$.

III. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть фигура получена при вращении вокруг оси Ox графика функции $y=f(x)$, являющегося гладкой кривой (*рис. 7*).

Тогда площадь поверхности S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (7)$$

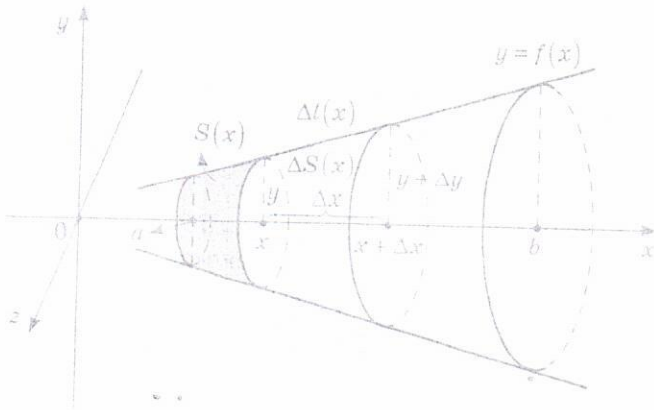


Рис. 7

Докажем её. Возьмём $x\in[a;b]$ и рассмотрим часть поверхности вращения, расположенную левее точки x. Площадь этой поверхности вращения обозначим через $S(x)$. Вычислим производную этой функции. Чтобы не усложнять вычисления, приведём наглядную схему вычисления для случая $\Delta x>0$. Тогда $\Delta S(x)$ приближённо можно считать площадью боковой поверхности усечённого конуса с образующей $\Delta l(x)$ — отрезком дуги — и радиусами оснований $y+\Delta y$ и y, то есть (см. I, п. 3)

$$\Delta S(x)\approx\pi((y+\Delta y)+y)\cdot\Delta l(x),$$

или

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta l(x)}\approx 2\pi y+\pi\Delta y.$$

Это приближённое равенство тем точнее, чем меньше Δx. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим равенство

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta l(x)}=2\pi y+\pi\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y,$$

или, учитывая, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}}{\frac{\Delta l(x)}{\Delta x}}=2\pi y, \quad \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta l(x)}{\Delta x}}=2\pi y,$$

$$\frac{S'(x)}{l'(x)}=2\pi y, \quad S'(x)=2\pi y\cdot l'(x).$$

Поскольку

$$l'(x)=\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

(см. формулу (6)), то

$$S'(x)=2\pi y\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}.$$

Таким образом, $S(x)$ есть первообразная для функции

$$2\pi y \cdot \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}$$

на отрезке $[a;b]$. Площадь S поверхности вращения получим при $x=b$:

$$S=S(b).$$

Заметив, что

$$S(a)=0,$$

находим:

$$S=S(b)-S(a), \text{ или } S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

где

$$y=f(x) \text{ и } y'(x)=f'(x).$$

Теперь о применении формулы (7).

Для боковой поверхности цилиндра, конуса, усечённого конуса и для сферы (*рис. 8*) имеем соответственно:

$$f(x)=R,\ f(x)=\frac{R}{H}x,$$

$$f(x)=\frac{R-r}{H}x+r,\ f(x)=\sqrt{R^2-x^2}.$$

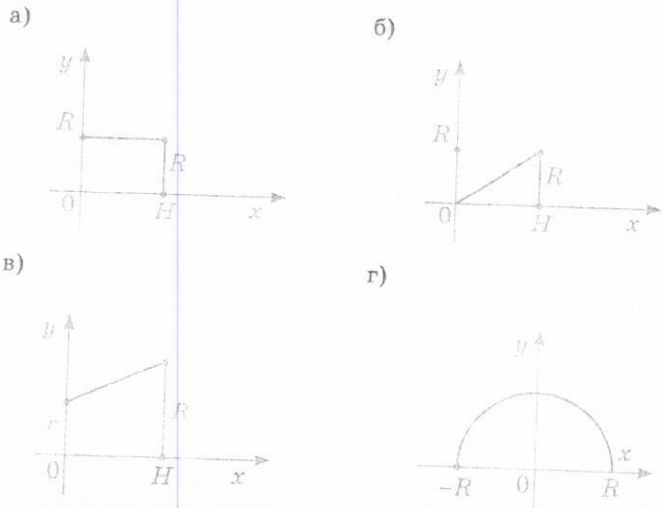


Рис. 8

Для распознавания функции в случае усечённого конуса мы воспользовались уравнением прямой, проходящей через точки $(0;r)$ и $(H;R)$ (см. I, п. 4). Во всех случаях интеграл (7) может быть легко взят. Например, для сферы (остальные случаи предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно) имеем:

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi R\int_{-R}^{R}1\cdot dx=2\pi R\,x\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2.$$

Задача 2. Докажите, что площадь S сферической поверхности шарового сегмента вычисляется по формуле

$$S=2\pi Rh,$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента.

Доказательство. Введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на *рис. 9*. Тогда

$$OB=R,\ OO_1=R-h.$$

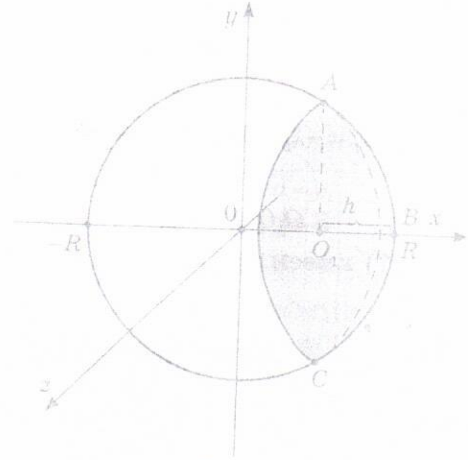


Рис. 9

Сегмент ABC получается вращением криволинейного треугольника O_1AB вокруг оси Ox. Дуга AB имеет уравнение

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Отсюда согласно формуле (7) имеем:

$$S=2\pi\int_{R-h}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi R\,x\Big|_{R-h}^{R}=2\pi Rh,$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Докажите, что площадь S сферической поверхности шарового слоя вычисляется по формуле $S=2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота слоя.

Доказательство. Введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на *рис. 10*. Тогда поверхность шарового слоя получается вращением дуги AC вокруг оси Ox.

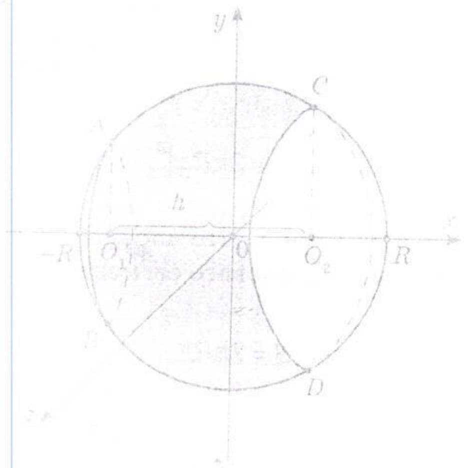


Рис. 10

Дуга AC имеет уравнение

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Пусть пара чисел $(x_0;y_0)$ — координаты точки A. Тогда

$$OO_1=-x_0,\ \ OO_2=h+x_0$$

(поскольку

$$O_1O_2=h).$$

По формуле (7) имеем:

$$S=2\pi\int\limits_{x_0}^{h+x_0}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int\limits_{x_0}^{h+x_0}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int\limits_{x_0}^{h+x_0}R\,dx=$$

$$=2\pi R\,x\Big|_{x_0}^{h+x_0}=2\pi Rh,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. *Алгебра* и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова. — 14-е изд. — М. : Просвещение, 2004. — 384 с.: ил.
2. *Погорелов А. В.* Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А. В. Погорелов. — 9-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 175 с.: ил.
3. *Сефибеков С. Р.* Внеклассная работа по математике: Кн. для учителя: Из опыта работы. — М. : Просвещение, 1988. — 79 с.: ил.
4. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. 10–11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. заведений. — М. : Дрофа, 1999. — 208 с.: ил.

ТЕМА 9. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ СЕГМЕНТА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА

Взглянем на планиметрию
со стороны анализа...

***

Площадь сегмента изучается в курсе геометрии 9 класса. К этому вопросу можно вернуться в 11 классе на занятии элективного курса.

Хорда AB разбивает круг на две части: AnB и AmB (*рис. 1*), называемые сегментами. В случае, когда хорда совпадает с диаметром, эти сегменты превращаются в полукруги.

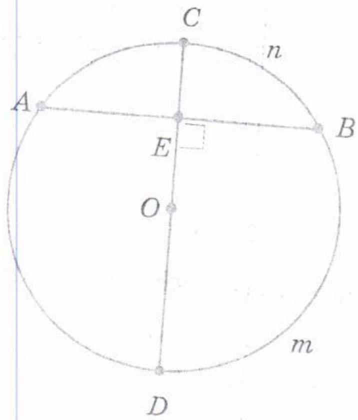


Рис. 1

Проведём диаметр $CD \perp AB$, E — точка пересечения CD и AB.

Отрезок CE называют высотой сегмента AnB, а отрезок DE — высотой сегмента AmB; хорду AB называют их основанием.

Выведем формулу для нахождения площади малого сегмента AnB.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Определение дифференциала.

Определение 1. Дифференциалом dy функции $y=f(x)$ называют произведение производной этой функции на приращение аргумента Δx, то есть

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (1)$$

Пример 1. Найти дифференциал dx аргумента x.

Решение

По определению 1 имеем:

$$dx=x'\cdot\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x,$$

$$dx=\Delta x, \qquad (2)$$

то есть дифференциал аргумента равен его приращению.

Из равенств (1) и (2) следует:

$$dy=f'(x)\cdot dx. \qquad (3)$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Из формулы (3) вытекает представление производной в виде частного двух дифференциалов:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Этим обозначением производной постоянно пользуются наряду с обозначениями y' и $f'(x)$.

Формула (3) показывает, что для нахождения дифференциала функции достаточно найти производную этой функции и полученное выражение умножить на dx.

Таким образом, техника вычисления дифференциала может быть сведена к технике отыскания производной.

Операцию нахождения дифференциала, так же как и операцию нахождения производной, называют дифференцированием.

Следует отметить, что дифференциалы можно вычислить и непосредственно, не находя предварительно производной, а пользуясь таблицей формул и правил, подобных тем, которые давались для производной.

Пример 2. Найти дифференциал функции: а) x^n; б) $\sqrt{x}$; в) $\dfrac{u}{v}$, где u и v — функции от аргумента x, имеющие производные.

Решение

а) $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, тогда $d\left(x^n\right)=nx^{n-1}dx$;

б) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, тогда $d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$;

в) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, тогда $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Пример 3. Найти дифференциал функции:

а) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$; б) $y=x^3\ln x$.

Решение

а) *Способ 1.* Найдём производную от заданной функции:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\left(1+\sin^2 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot 2\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Тогда, по определению дифференциала,

$$dy=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx.$$

Способ 2. Найдём непосредственно дифференциал:

$$dy=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot d\left(1+\sin^2 x\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot 2\sin x\cos x dx=$$

$$=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx.$$

б) Найдём дифференциал данной функции:

$$dy=d\left(x^3\right)\cdot\ln x+x^3 d(\ln x)=$$

$$=3x^2dx\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=x^2(1+3\ln x)dx.$$

2. Неопределённый интеграл.

Известно, что первообразной функции $f(x)$ в данном интервале называют функцию $F(x)$, если в каждой точке этого интервала

$$F'(x)=f(x); \qquad (4)$$

при этом все первообразные этой функции, и только они, содержатся в выражении

$$F(x)+C, \qquad (5)$$

где C — произвольная постоянная.

Определение 2. Совокупность всех первообразных некоторой функции $f(x)$ называют неопределённым интегралом функции $f(x)$ и обозначают

$$\int f(x)dx. \qquad (6)$$

При этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, а $\int$ — знаком интеграла.

Таким образом,

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (7)$$

Отыскание неопределённого интеграла некоторой функции называют интегрированием.

Дифференцирование и интегрирование представляют собой взаимно обратные операции. Каждой формуле дифференцирования (4) соответствует формула интегрирования (7).

Пример 4. Вычислить интеграл:

а) $\int x^2dx$; б) $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Решение

а) $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$;

б) ОДЗ: $1-x^2\ge 0$, откуда $-1\le x\le 1$.

Так как $-1\le\sin u\le 1$, то положим $x=\sin u$. Отсюда $u=\arcsin x$ и $\cos u\ge 0$, так как

$$-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому имеем:

$$dx=\cos u\,du \text{ (см. равенство (3))}$$

и

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\,du=$$

$$=\int\sqrt{\cos^2 u}\cdot\cos u\,du=\int\cos u\cos u\,du=$$

$$=\int\cos^2 u\,du=\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2u\right)du=$$

$$=\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C.$$

Остаётся вернуться к переменной x. Учитывая, что $u=\arcsin x$ и $\cos u\ge 0$, имеем:

$$\sin 2u=2\sin u\cos u=$$

$$=2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}=$$

$$=2\sin(\arcsin x)\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=$$

$$=2x\sqrt{1-x^2}.$$

Значит,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C. \qquad (8)$$

ПЛОЩАДЬ СЕГМЕНТА

Задача. Пусть r — радиус круга, $CE=h$ — высота и $AB=b$ — основание сегмента AnB, где $h<r$ (рис. 1). Найти площадь сегмента AnB (S_{AnB}).

Решение

Выберем систему прямоугольных координат Oxy с началом в центре круга — точке O, ось y направим вдоль прямой OC (*рис. 2*).

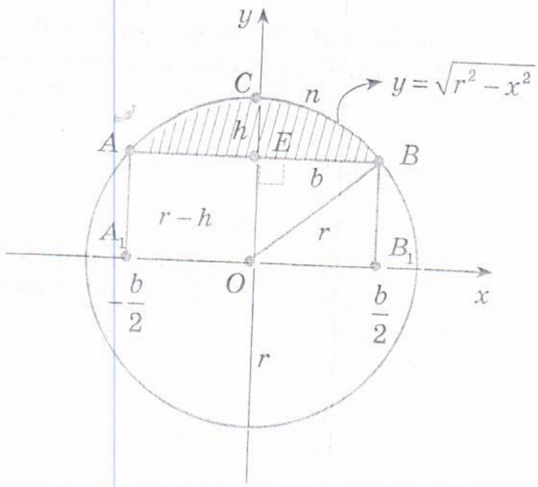


Рис. 2

Тогда $OE=OC-CE=r-h$; точки A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ось Ox. Поскольку $AB=b$, то $A_1\left(-\frac{b}{2};0\right)$, $B_1\left(\frac{b}{2};0\right)$ (так как $OA_1=OB_1=EA=EB=\frac{b}{2}$).

Уравнение окружности — $x^2+y^2=r^2$, а уравнение дуги AnB — $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Имеем:

$$S_{AnB}=S_{A_1ACBB_1}-S_{A_1ABB_1}. \qquad (9)$$

Но

$$S_{A_1ABB_1}=AB\cdot OE=b(r-h), \qquad (10)$$

так как A_1ABB_1 — прямоугольник с основанием $AB=b$ и высотой $OE=r-h$;

$$S_{A_1ACBB_1}=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=r\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx,$$

или (*см. равенство (8)*)

$$S_{A_1ACBB_1}=r\cdot\frac{1}{2}\cdot r\left(\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}=$$

$$=r^2\left(\arcsin\frac{b}{2r}+\frac{b}{2r}\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}\right). \qquad (11)$$

Из равенств (9) – (11) имеем:

$$S_{AnB}=r^2\left(\arcsin\frac{b}{2r}+\frac{b}{2r}\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}\right)-b(r-h), \qquad (12)$$

где $h<r$.

Для вычисления площади большого сегмента AmB (рис. 1) нужно из площади круга πr^2 вычесть площадь сегмента AnB.

Выразим в формуле (12) длину основания сегмента b через h и r. Из прямоугольного треугольника OBE (рис. 2) имеем:

$$BE^2+OE^2=OB^2,$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+(r-h)^2=r^2,$$

$$\frac{b^2}{4}+r^2-2rh+h^2=r^2,$$

$$b^2=4\left(2rh-h^2\right),$$

откуда

$$b=2\sqrt{2rh-h^2}. \qquad (13)$$

Таким образом, для определения площади малого сегмента (*см. (12) и (13)*) достаточно знать его высоту и радиус круга r.

Заметим, что при $h=r$ формула (12) даёт $\frac{\pi r^2}{2}$ — площадь полукруга.

Пример. Определить площадь сегмента с высотой 1,5 м, если радиус круга равен 1 м.

Решение

Найдём площадь малого сегмента. Имеем: $h=2-1,5=0,5$ (м) (2 м — длина диаметра); по формуле (13)

$$b=2\sqrt{2\cdot1\cdot0,5-0,5^2}=2\sqrt{0,75}\approx1,732\text{ (м)}.$$

По формуле (12) имеем:

$$S_{\text{сег.}}\approx1^2\left(\arcsin0,866+0,866\sqrt{1-0,866^2}\right)-$$

$$-1,732(1-0,5)\approx$$

$$\approx1,0472+0,4330-0,8660=0,6142\text{ (м}^2).$$

Площадь искомого сегмента:

$$S=\pi r^2-S_{\text{сег.}}\approx3,14\cdot1^2-0,6142=2,5258\text{ (м}^2).$$

Ответ. 2,5258 м².

Литература(к.с.1-22)

Сефибеков С.Р. Элективный курс по математике в средней школе: методические рекомендации для студентов / С.Р.Сефибеков.- Н.Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014.-28с.

Литература (по публикациям тем 4-9, с.23-48)

1. Сефибеков С.Р.Посторенние корни уравнения//Математика. ВСЕ для учителя !-2014.-№5.-С.9-12.
2. Сефибеков С.Р. Использование алгоритмов в математических объектах//Математика. ВСЕ для учителя!-2017.-№9-С.6-11.
3. Сефибеков С.Р. Ключ к решению задач-переход от одной фигуры к другой //Математика .ВСЕ для учителя!-2015.-№2-С.2-4
4. Сефибеков С.Р. Асимптоты. Дополняем школьный курс «Алгебра и начала математического анализа»// Математика . ВСЕ для учителя!-2019.-№1.-С.6-9
5. Сефибеков С.Р. Взгляд на два вопроса геометрии со стороны анализа // Математика . ВСЕ для учителя! -2015.-№1-С.5-10
6. Сефибеков С.Р. Вывод формулы площади сегмента с помощью интеграла // математика . ВСЕ для учителя!-2018.-№10.-С.11-13.

ИТОГИ 55-ЛЕТНЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ШКОЛЕ

Всем известно, как трудно сделать что-нибудь стоящее, поэтому я считаю себя счастливым, что мне удалось написать множество научно-методических, теоритических и педагогических трудов по математике. Но тщеславие отступает на задний план , когда думаешь о том , сколько проблем ты пытался вновь и вновь решать, но так и не смог. Ясно ,что никто не может претендовать на монополию в математических способностях или на создание прекрасного в математике. В беге не всегда одерживает победу быстрейший , а в борьбе-сильнейший !

Вся моя жизнь в математике была связана с тяжелым трудом. Я всегда знал, что нет королевского пути к математическим знаниям или к математическим открытиям. Но этот труд стоит того, чтобы его предпринимать. Для меня не существует большей радости, чем преодолевать препятствия и добиваться результата , и вероятно, каждый чувствует себя счастливее ,когда делает работу, которая ему нравится (психологами доказано ,что, если такая работа дает свои результаты, то- это долголетие для человека!).

Я часто испытывал чувство восхищения и удивления красотой математики. Не могу придумать более подходящей аналогии, чем восхождение на вершины гор. Огромные усилия тут неизбежны . Но как прекрасно, проложив новый путь , который казался столь трудным , любоваться с вершины раскинувшимся перед тобой пейзажем и наслаждаться его красотой . В зрелом возрасте оглядываясь назад и размышляя над математикой с новых точек зрения, иногда удивляешься собственным старым результатам и почти не веришь, что они принадлежат тебе. Они представляются тебе самостоятельными сущностями, не зависимыми от их автора. Иногда даже приятно наблюдать так свои работы , забывая о собственном авторстве.

Я полностью удовлетворен своей **55**- летней учительской работой, и не желал бы для себя никакой другой судьбы. Некоторые учителя , удалившись на покой или даже несколько раньше , кажется , утрачивают интерес к работе, которая их занимала много лет. Необъяснимо, как они могут так полностью порывать с интересами своей предыдущей жизни. Что же касается меня, то я рад продолжать свою работу и написать научно-педагогические труды. Но я буду удовлетворен и если просто сохраню любовь к профессии учителя математики!