Элективный курс
Урок в 11 классе

С.Р.Сефибеков, МКОУ «Кашкентская СОШ», Республика Дагестан, Хивский район, село Кашкент

Дополняем школьный курс
«Алгебра и начала математического анализа»
Тема урока. Установление формул первообразных для логарифмических функций.
Цели: 1. Формирование у учащихся осознания новых формул, применять формулы при решении задач.
2. Способствовать развитию познавательного интереса учащихся, логического мышления, культуры математической речи.
Тип урока: изучение нового материала.

ХОД УРОКА

1. Организационный момент

Повторение определения первообразной и таблицы первообразных (см.§ 55 учебника [1])

2. Изучение нового материала

В учебниках «Алгебра и начала анализа» для X - XI классов нет формул первообразных для логарифмических функций $f(x) = lnx$ и $f(x) = log_a x$ (см., например, [1]).

Мы выведем такие формулы – смотреть таблицу :

Функция, f(x)	Общий вид первообразных, F(x)
lnx	$xlnx\text{-}x+C$
$log_a x$	$\frac{1}{lna}(xlnx - x) + C$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $f(x) = 0, f(x) = lnx, x = 1$ и $x = x_0$ (где $x_0 > 1$).

Решение.

Площадь (S) данной криволинейной трапеции ABC (рис.1) :

$S = \int_1^{x_0} \ln(x) dx (1)$

Всероссийский педагогический журнал

«Современный урок»

Всероссийский конкурс

«Творческий учитель-2023»

Сефибеков Сефибек Рамазанович

Урок в 11 классе.

Тема урока: Установление формул первообразных для логарифмических функций

(Элективный курс)

Дагестан-Кашкент

2023

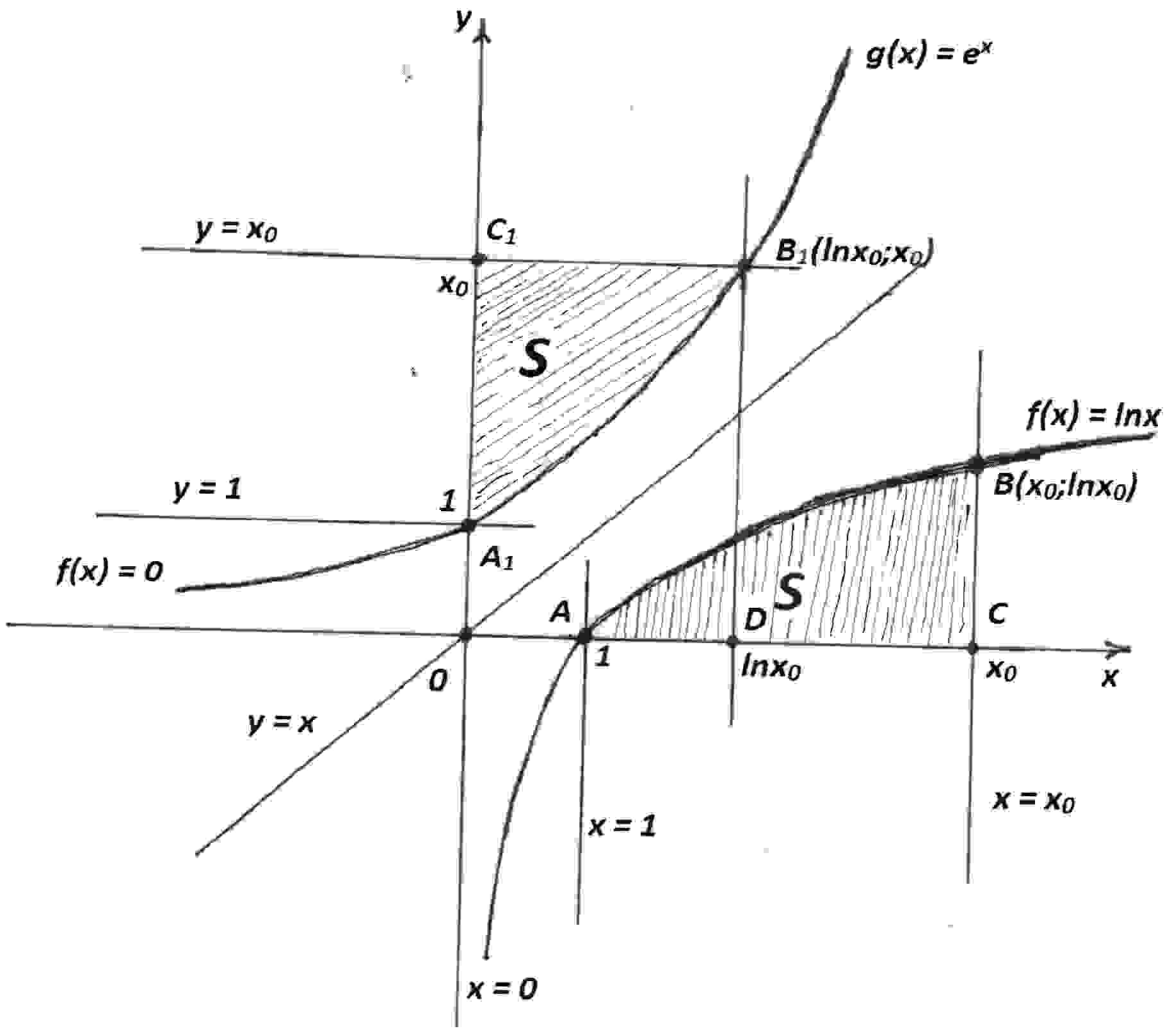

Рис. 1

Вычислить этот интеграл мы не можем, так как не знаем первообразную для функции *lnx*. Поэтому поступим следующим образом. Выполнив осевую симметрию криволинейной трапеции ABC относительно биссектрисы $y = x$, получим криволинейную трапецию $A_1B_1C_1$ (ей равную) той же площади S, ограниченную линиями: $y = x_0$, $y = 1$, $x = 0$ и $g(x)=e^x$ ($g(x) = e^x$ – функция, обратная для функции $f(x) = lnx$).Вычислим ее площадь:

S = пл.OC_1B_1D – пл.OA_1B_1D

$S = x_0\ln(x_0) - \int_0^{\ln(x_0)} e^x dx,$

$S = x_0\ln(x_0) - e^x\Big|_0^{\ln(x_0)}$, т.е.

$S = x_0\ln(x_0) - x_0 + 1$(2)

Ответ: $x_0\ln(x_0) - x_0 + 1$ кв.ед.

Теперь из равенства (1) и (2) имеем:

$\int_1^{x_0} \ln x dx = x_0\ln x_0 - x_0 + 1,$

или, полагая $x_0 = x$, получим:

$\int_1^x \ln x dx = x\ln x - x + 1,$

т.е. $F(x) = x\ln x - x = 1$ (3)

Есть одна из первообразных функций для функции $f(x) = \ln x$. (4)

Заменяя равенство (3) 1 на C (где $C = const$), получим общий вид первообразных для функции (4):

$F(x) = x\ln x - x + C$ (5)

По формуле перехода от одного основания логарифма к другому имеем:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$$

Применяя формулу (5), получим:

$$F(x) = \frac{1}{\ln(a)}(x\ln(x) - x) + C \qquad (6)$$

Таким образом, функция (6) представляет общий вид первообразных для функции $f(x) = \log_a x$

3.Закрепление новых знаний.

Задача1. Найти общий вид первообразных следующих функций:

а) $f(x) = \log_3(x)$; б) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$

Решение:

а) $F(x) = \frac{1}{\ln(3)}(x\ln(x) - x) + C$;

б) $F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}((2x-5)\ln(2x-5) - (2x-5)) + C,$

$F(x) = -\frac{1}{\ln(4)}((2x-5)\ln(2x-5) - 2x + 5) + C.$

Задача 2. Вычислить площадь фигуры, с ограниченной линиями:

$f(x) = \log_3 x$, $x = 3$ и $x = 27$ (рис. 2).

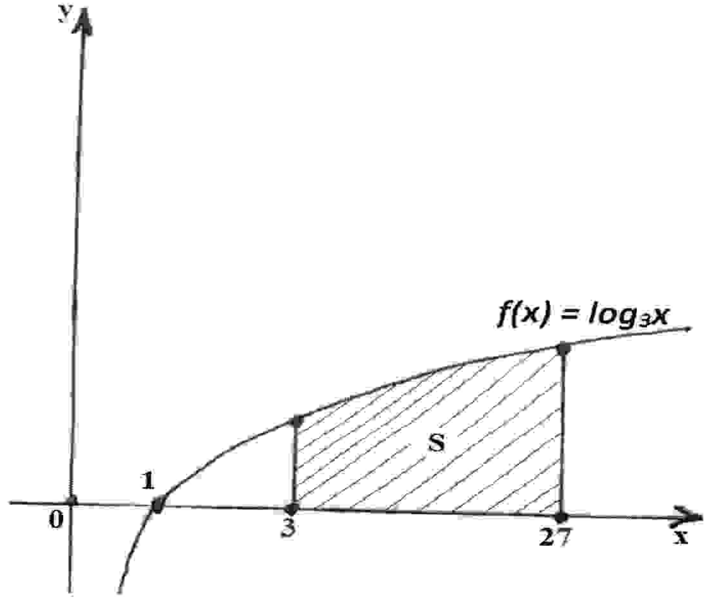

Рис. 2

Решение:

Имеем (см. решение задачи $1a$):

$$S=\int_3^{27}\log_3(x)dx=\frac{1}{\ln(3)}(x\ln x-x)\Big|_3^{27}=\frac{1}{\ln(3)}(27\ln 27-27)-\frac{1}{\ln(3)}(3\ln 3-3)=81-\frac{27}{\ln(3)}-3+\frac{3}{\ln(3)}=78-\frac{24}{\ln(3)}.$$

Ответ: $78-\dfrac{24}{\ln(3)}$

Задача 3. При каких значениях параметра a выполнено условие:

1) $\int_1^a \ln x dx=1;$

2) $\int_1^a \ln x dx=a+1$

Решение.

Прежде заметим , что $a>1$ как верхний предел интеграла.

1) $\int_1^a \ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^a=a\ln a-a-(1\ln 1-1)=a\ln a-a+1.$

Тогда $a\ln a-a+1=1, a(\ln a-1)=0,$ откуда $\ln a-1=0, \ln a=1, a=e$

2) Аналогично имеем:

$a\ln a-a+1=a+1,$

$a\ln a=2a, \ln a=2, a=e^2$

Ответы: $1)\, a=e; 2)\, a=e^2$

Примечание. Если в формуле(6) положить $a = e$, то получим формулу(5).

IV. Справка.

Отметим, что формула (5) устанавливается в полных курсах математического анализа

способом интегрирования, называемым «Интегрированием по частям», т.е. аналитически.

V. Подведение итогов урока.

Учитель. Я думаю, мы с вами неплохо потрудились и за время урока смогли приобрести новые знания (расширили список известных формул первообразных). Хочется услышать ваше мнение об уроке.

«МИКРОФОН»

Сегодня я узнал…

Было интересно …

Я понял, что…

Было трудно …

Меня удивило…

Я научился…

VI. Домашнее задание:

Изучить вывод новых формул.

Литература

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / (Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачёва, и др).-4-е издание.- М.: Просвещение, 2017.-453с.: ИЛ.