Методическая разработка для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

ОБЩИЙ ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

(современные образовательные технологии-элективный курс)

ОБЩИЙ ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Определение. Признаком делимости называется правило, по которому, не выполняя деления, можно установить, делится ли одно число на другое.

С некоторыми признаками делимости учащиеся знакомятся в курсе математики 6-го класса. Общий признак делимости — признак делимости на натуральное число — связан с именем знаменитого французского математика, физика и философа Блеза Паскаля (1623–1662).

Приведу вывод «признака Паскаля» и рассмотрю некоторые его следствия. Данный материал учитель может использовать на кружковых и элективных занятиях с учащимися 8–9-х классов.

Натуральные числа можно записать в виде суммы их разрядных единиц. Например, число 756:

$$756 = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2;$$

число 2354:

$$2354 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$$

и т.д. Если мы имеем некоторое $(n + 1)$-значное число A, то его можно записать в виде

$$A = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — его разрядные единицы, $A = \overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Установим делимость натурального числа A на натуральное число $b \neq 1$. Пусть g_0 и r_0, g_1 и r_1, g_2 и r_2, ..., g_n и r_n — соответственно частные и остатки деления чисел $1 = 10^0, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ на число b ($0 \leq r_i < b$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$). Тогда

$$1 = bg_0 + r_0,\ 10 = bg_1 + r_1,\ 10^2 = bg_2 + r_2,\ \ldots,\ 10^n = bg_n + r_n.$$

Подставим данные выражения в равенство (1):

$$A = a_0(bg_0 + r_0) + a_1(bg_1 + r_1) + a_2(bg_2 + r_2) + \ldots + a_n(bg_n + r_n).$$

Учитывая, что $g_0 = 0$, имеем:

$$A = b(a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n) + (a_0 r_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n). \qquad (2)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2) делится на b. Поэтому если A делится на b, то и второе слагаемое делится на b. И наоборот, если второе слагаемое делится на b, то и A делится на b. Это и есть *«признак Паскаля»*:

Если число A делится на число $b \neq 1$, то сумма

$$a_0 r_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n \qquad (*)$$

делится на b и наоборот, если сумма (*) делится на b, то и A делится на b.

Примечание 1. Признак Паскаля сводится к вычислению суммы (*). Главным его недостатком является вычисление остатков r_0, r_1, r_2, ... непосредственным делением степеней числа 10 на число b. От этих остатков и зависит вычислительная работа в приведенной выше сумме. Если эта работа большая, то признаком Паскаля пользоваться не следует, а делимость чисел лучше проверить непосредственным делением.

Частные случаи признака Паскаля как его следствия

1. Пусть $b = 2$, тогда $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ и потому

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0.$$

Мы получили *признак делимости числа А на 2*:

Число делится на 2, если оно четно, то есть когда его последняя цифра делится на 2.

2. Пусть $b = 3$ (или $b = 9$). Тогда

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$$

и

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = \\ = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

— это сумма цифр числа A. Она и определяет *признак делимости числа А на 3 (или на 9)*:

Если сумма цифр числа делится на 3 (или на 9), то и само число делится на 3 (или на 9).

3. Пусть $b = 7$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 6,\ r_4 = 4,\ r_5 = 5,\ r_6 = 1,\\ r_7 = 3,\ r_8 = 2,\ r_9 = 6,\ r_{10} = 4,\ r_{11} = 5,\ \ldots.$$

Мы видим, что идет повторение остатков: 1, 3, 2, 6, 4, 5; 1, 3, 2, 6, 4, 5; ....

Для делимости на 7 у остатков 6, 4, 5 не хватает соответственно 1, 3, 2. Эти недостающие единицы запишем со знаком «–»: –1, –3, –2. Тогда остатки выглядят следующим образом:

$$r_0 = 1,\ r_1 = 3,\ r_2 = 2,\\ r_3 = -1,\ r_4 = -3,\\ r_5 = -2,\ r_6 = 1,\\ r_7 = 3,\ r_8 = 2,\\ r_9 = -1,\ r_{10} = -3,\\ r_{11} = -2,\ \ldots.$$

Здесь имеем:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 - a_3 \cdot 1 - a_4 \cdot 3 - a_5 \cdot 2,\ \ldots$$

(далее остатки 1, 3, 2, –1, –3, –2 повторяются).

Запишем последнюю сумму в виде

$$(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2) - \\ - (a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 3 + a_5 \cdot 2) + \ldots. \qquad (3)$$

Соотношение (3) определяет *признак делимости числа А на число 7*.

Составим *алгоритм к сумме (3)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 6 цифр (в гранях могут оказаться и меньше шести цифр).

2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

3. Вычислим сумму (3). Если значение этой суммы делится на 7, то и число делится на 7. В противном случае — число не делится на 7.

Пример 1. Установите делимость чисел на 7:

а) 2359; б) 46 382; в) 321 783; г) 31 468 164; д) 20 321 356 384 013 293.

Решение.

а) $\underbrace{\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cccc} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}}$

$$(9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (2 \cdot 1) = 30 - 2 = 28,$$

делится на 7, тогда 2359 делится на 7.

б) $\underbrace{\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 3 & 8 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{ccccc} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}}$

$$(2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 4 \cdot 3) = 32 - 18 = 14,$$

делится на 7, тогда 46 382 делится на 7.

в) $\underbrace{\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cccccc} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}}$

$$(3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2) - (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = \\ = 41 - 13 = 28,$$

делится на 7, тогда 321 783 делится на 7.

г) $\underbrace{\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cc} a_1 & a_0 \end{array}} \underbrace{\begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 8 & 1 & 6 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cccccc} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}}$

$$(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 2) - (8 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2) + \\ + (1 \cdot 1 + 3 \cdot 3) = \\ = 24 - 34 + 10 = 0,$$

делится на 7, тогда 31 468 164 делится на 7.

д) $\underbrace{\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{ccccc} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}} \underbrace{\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 6 & 3 & 8 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cccccc} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}} \underbrace{\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 2 & 9 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}}_{\begin{array}{cccccc} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}}$

$$(3 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2) - (3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2) + \\ + (4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + \\ + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - (0 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = \\ = 34 - 6 + 34 - 27 + 13 - 6 = 42,$$

делится на 7, тогда 20 321 356 384 013 293 делится на 7.

4. Пусть $b = 11$. Тогда

$$r_0 = 1,\ r_1 = 10,\ r_2 = 1,\ r_3 = 10,\ r_4 = 1,\ r_5 = 10,\ \ldots$$

Для делимости числа A на 11 у остатков r_1, r_3, r_5, ... не хватает 1. Эту недостающую 1 запишем со знаком «–», то есть –1. Тогда остатки примут вид:

$$r_0 = 1,\ r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1,\ r_4 = 1,\ r_5 = -1,\ \ldots$$

Имеем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

или

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \qquad (4)$$

Соотношение (4) определяет *признак делимости числа А на 11*, а именно:

Если разность между суммами цифр числа, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11, то и число A делится на 11.

Примечание 2. Расположение цифр в сумме (4) можно определить слева направо и наоборот, справа налево. Это не влияет на установленный алгоритм.

Пример 2. Число 543 675 319 делится на 11, так как

$$(5+3+7+3+9)-(4+6+5+1)=$$
$$=27-16=11,$$

делится на 11.

5. Для получения признака делимости на 13 ($b = 13$) будем иногда брать остатки от деления чисел 10^0, 10, 10^2, 10^3, ... на 13, а иногда и недостатки (взятые со знаком минус):

$$r_0 = 1,\ r_1 = -3,\ r_2 = -4,$$
$$r_3 = -1,\ r_4 = 3,\ r_5 = 4,\ r_6 = 1,\ \ldots$$

(далее те же остатки повторяются, начиная с r_1 до r_6). Тогда

$$a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6 - \ldots,$$
$$a_0 - (3a_1 + 4a_2 + a_3) + (3a_4 + 4a_5 + a_6) - \ldots. \qquad (5)$$

Составим *алгоритм к сумме (5)*.

1. Разбиваем число справа налево на грани по 3 цифры, исключив первую цифру a_0 (в гранях могут оказаться и меньше трех цифр).

2. Занумеруем в каждой грани цифры справа налево так: a_1, a_2, a_3.

3. Вычислим сумму (5). Если значение этой суммы делится на 13, то и число делится на 13.

Пример 3. Установите делимость чисел на 13:
а) 52 651; б) 265 265 091;
в) 780 265 265 091.

Решение.

$$\text{а)}\ \begin{array}{ccccc} 5 & 2 & 6 & 5 & 1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot5+4\cdot6+2)+(3\cdot5)=1-41+15=-25,$$

не делится на 13, тогда 52 651 не делится на 13.

$$\text{б)}\ \begin{array}{ccccccccc} 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+$$
$$+(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2)=$$
$$=1-32+31-26=-26,$$

делится на 13, тогда 265 265 091 делится на 13.

$$\text{в)}\ \begin{array}{cccccccccccc} 7 & 8 & 0 & 2 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 0 & 9 & 1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 & a_1 & \end{array}$$

$$1-(3\cdot9+4\cdot0+5)+$$
$$+(3\cdot6+4\cdot2+5)-(3\cdot6+4\cdot2+0)+$$
$$+(3\cdot8+4\cdot7)=1-32+31-26+52=26,$$

делится на 13, тогда 780 265 265 091 делится на 13.

Пример 4. Докажите, что число $A = 888...8$, состоящее из 2022 цифр, делится на 13.

Решение. Возьмем число $A_1 = 888\,888$, состоящее из 6 цифр, и применим к нему алгоритм:

$$8-(3\cdot8+4\cdot8+8)+(3\cdot8+4\cdot8)=8-8=0.$$

Так как 0 делится на 13, то и число A_1 делится на 13. Заметим, что $\frac{2022}{6} = 337$. Тогда число A можно разбить на 337 граней, содержащих по шесть цифр. Следовательно, число A делится на 13.

Примечание 3. Если число b представляет собой произведение простых множителей, для которых признак Паскаля уже установлен, то легко установить признак делимости на это число. Например, если $b = 3 \cdot 11 = 33$, то число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11.

В заключение предлагаю читателям поработать над проблемой получения других признаков делимости как следствий признака Паскаля.

Литература

1. *Виленкин Н.Я.* Математика. Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений. — 30-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013.

2. *Сефибеков С.Р.* Внеклассная работа по математике: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1988.