Методическая разработка для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

О развитии математического мышления учащихся

(современные образовательные технологии-элективный курс)

От автора

Мышление-это психический процесс, благодаря которому человек отображает существенные признаки и связи предметов и явлений окружающей действительности, постигает закономерности развития окружающего мира, предвидит будущее и действует целенаправленно и планомерно.

Математическое мышление развивается в процессе решения задач. Задачи бывают стандартными, учебными, творческими, исследовательскими.

Стандартные задачи-наиболее простые, без умения их решать невозможно достичь более высоких результатов (и получить положительную отметку).

Учебные задачи-самая многочисленная группа задач, которые учащиеся решают и в классе, и дома. Эти задачи позволяют усвоить материал учебника и перейти к решению более сложных задач. Такими являются творческие и исследовательские задачи. Творческие задачи не удается решать стандартными методами, для их решения нужно выдвигать некоторые новые идеи. Решение исследовательских задач требует значительных усилий, предполагает работу не только на уроках, но и на внеклассных занятиях, дома.

Предполагаемый материал изложен простым и доступным математическим языком- он полезен всем, кто интересуется математикой (учащимся, родителям, учителям, студентам педагогических вузов по специальности «Математика»).

12.01.2022г.

С. Сефибеков

О развитии математического мышления учащихся

Математическое развитие человека определяется умением решать сложные задачи.

С.Р.Сефибеков.

Здесь предлагаем сложные задачи, которые учителя могут использовать во внеклассной работе, при подготовке и проведении школьных олимпиад, на факультативных занятиях, элективных курсах, а также при индивидуальной работе с учащимися

1.Докажите, что из любых 11 чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 5.

Доказательство.

Среди любых 11 чисел всегда имеется по крайней мере два таких числа, которые оканчиваются одной и той же цифрой (так как цифр всего 10), а значит, разность этих двух чисел оканчивается нулём, то есть разность кратна 5.

2. Докажите, что разность $20163^{1999} - 20177^{1997}$ кратна 5.

Доказательство

Будем искать лишь последнюю цифру каждого из данных чисел.

1) $3^{1999} = \left(3^4\right)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$. Несложно увидеть, что число — произведение чисел 81^{499} и 27 оканчивается цифрой 7.
2) $7^{1997} = \left(7^4\right)^{499} \cdot 7 = 2401^{499} \cdot 7$ — здесь также произведение оканчивается цифрой 7.

Тогда разность этих чисел оканчивается нулём, а значит, заданная разность кратна 5.

3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 2017, а при делении на 2014 даёт в остатке 2001.

Решение

Обозначим искомое число через x. По условию оно делится на 2017.

$$2017 = 2014 + 3, \text{ тогда}$$

$$x = 2017 \cdot t = (2014 + 3) \cdot t,$$

или

$$x = 2014t + 3t.$$

По условию $3t = 2001$, откуда $t = 667$. Значит, искомое число $x = 2017 \cdot 667 = 1\,345\,339$.

Ответ. 1 345 339.

4. Найдите все натуральные числа, которые в 9 раз больше своей последней цифры.

Решение

Искомые числа не больше $9 \cdot 9 = 81$, так как 9 — наибольшая из возможных цифр. Пусть x и y — первая и последняя цифры этих чисел. Поскольку искомые числа двузначные, то их можно записать в виде $10x + y$.

По условию $10x + y = 9y$, или $5x = 4y$. Это равенство возможно лишь при $x = 4$, $y = 5$. Следовательно, мы имеем единственное двузначное число — 45.

Ответ. 45.

5. Произведение цифр трёхзначного числа равно 252. Найдите такие числа.

Решение

Угадываем одно число, например, 479: $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$. Остальные числа получаем перестановкой цифр в числе 479.

Ответ. 479, 497, 749, 794, 947, 974.

6. Можно ли квадрат натурального числа представить в виде суммы четырёх различных двузначных чисел, записанных с помощью двух заданных цифр?

Решение

Пусть x^2 — квадрат натурального числа x и a, b — цифры двузначного числа. Тогда имеем двузначные числа $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{aa}$ и $\overline{bb}$. Допустим, что

$$x^2 = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{aa} + \overline{bb} =$$

$$= (10a + b) + (10b + a) + (10a + a) + (10b + b) =$$

$$= 22a + 22b = 22(a + b).$$

Отсюда получаем, что сумма $a + b$ должна быть кратна числу 22, чего быть не может, так как a и b — цифры.

Ответ. Нельзя.

7. Продаётся 10 автомобилей и 10 ключей от этих автомобилей находятся в коробочке, но неизвестно, какой ключ — от какого автомобиля. Сколько проб придётся сделать в самом худшем случае, чтобы подобрать к каждому автомобилю свой ключ?

Решение

Первым из 10 ключей в самом худшем случае придётся сделать 9 проб, вторым ключом — 8 проб, третьим — 7 проб, ..., девятым ключом — одну пробу. Итак, всего проб:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = \frac{1+9}{2} \cdot 9 = 45.$$

Ответ. 45.

8. Найдите четырёхзначное число вида $\overline{a19b}$ (с цифрами по порядку a, 1, 9, b), делящееся на 82.

Решение

Обозначим искомое число через A:

$$A = \overline{a19b} = 1000a + 100 + 90 + b,$$

или

$$A = 1000a + (190 + b).$$

Так как 82 — число чётное, то A должно быть чётным числом. Отсюда $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ и a — первая цифра искомого числа — $1 \le a \le 9$. Если сумма A делится на 82, то сумма остатков, получаемых от деления каждого слагаемого ($1000a$ и $190 + b$) на 82, должна делиться на 82.

Составим таблицы остатков.

Таблица 1

Число тысяч, a	1	2	<u>3</u>	4	5	6	7	8	9
Остатки от деления на 82	16	32	<u>48</u>	64	80	14	30	46	62

Таблица 2

Число единиц, b	0	2	4	6	<u>8</u>
Остатки от деления числа $190 + b$ на 82	26	28	30	32	<u>34</u>

Испытывая суммы остатков из таблиц 1 и 2, заметим, что $48 + 34 = 82$ делится на 82. Значит, $a = 3$, $b = 8$ и мы имеем единственное число — 3198.

Ответ. 3198.

9. В строку записаны числа 1, 2, 3, ..., 2026. Разрешается взять любые два числа и из них составить их разность. Например, $1-2$, $3-9$, $2016-19$, $87-146$ и т. д. (взятые числа повторно брать не разрешается). Может ли сумма полученных таким образом 1013 разностей оказаться равной нулю?

Решение

Составим разности $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, $x_3 - y_3$, ..., $x_i - y_i$, где x_i и y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 1013$) — два числа из чисел данной строки. Пусть их сумма равна нулю, то есть

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{1013}) - (y_1 + y_2 + \ldots + y_{1013}) = 0.$$

Это равенство возможно при условии, когда суммы в обеих скобках равны, одновременно чётны или одновременно нечётны. В обоих случаях сумма всех чисел x_i и y_i должна быть чётной. Но у нас сумма

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2016 = \frac{1+2016}{2} \cdot 2026 = 2027 \cdot 1013$$

нечётна.

Следовательно, сумма искомых разностей не может быть равна нулю.

Ответ. Не может.

10. Существует ли такое натуральное число n, что произведение всех натуральных чисел от 1 до n оканчивается ровно 30 нулями? Ровно 31 нулём?

Решение

Чтобы получить в конце нуль, в произведении должны «участвовать» множители 2 и 5, то есть $(2\cdot 5)$, а чтобы получить 30 нулей — $(2\cdot 5)^{30}=2^{30}\cdot 5^{30}$.

Проверим, будет ли участвовать в произведении 2^{30}.

Испытаем произведения.

1) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10$.

Выделим числа, содержащие множитель 2: 2; $4=2\cdot 2$; $6=2\cdot 3$; $8=2\cdot 2\cdot 2$; $10=2\cdot 5$. Здесь содержится 2^8.

Показатель 8 можно получить иначе:

$$\left[\frac{10}{2}\right]+\left[\frac{10}{2^2}\right]+\left[\frac{10}{2^3}\right]+\left[\frac{10}{2^4}\right]=$$

$$=5+2+1+0=8$$

(знак $[a]$ означает: целая часть числа a).

Таким образом, чтобы установить, с каким показателем входит в произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 10$ число 2, нужно найти сумму целых частей от деления числа 10 на степени числа 2.

Применим полученный алгоритм для испытания других произведений.

2) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 20$.

Имеем:

$$\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{2^2}\right]+\left[\frac{20}{2^3}\right]+\left[\frac{20}{2^4}\right]+\left[\frac{20}{2^5}\right]=$$

$$=10+5+2+1+0=18.$$

Значит, в произведении участвует 2^{18}.

3) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 30$.

Имеем:

$$\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{2^2}\right]+\left[\frac{30}{2^3}\right]+\left[\frac{30}{2^4}\right]+\left[\frac{30}{2^5}\right]=$$

$$=15+7+3+1+0=26,$$

то есть в произведении участвует 2^{26}.

4) Так как число 31 не содержит в разложении множитель 2, то последний множитель возьмём в произведении равным 32, то есть испытаем произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 32$.

Имеем:

$$\left[\frac{32}{2}\right]+\left[\frac{32}{2^2}\right]+\left[\frac{32}{2^3}\right]+\left[\frac{32}{2^4}\right]+\left[\frac{32}{2^5}\right]+\left[\frac{32}{2^6}\right]=$$

$$=16+8+4+2+1+0=31,$$

то есть в произведении участвует 2^{31}.

Проверим теперь, будет ли участвовать в произведении 5^{30}.

Если $n=120$, то имеем:

$$\left[\frac{120}{5}\right]+\left[\frac{120}{5^2}\right]+\left[\frac{120}{5^3}\right]=$$

$$=24+4+0=28.$$

Число 28 получается и при $n=121$, $n=122$, $n=123$, $n=124$.

Если $n=125$, то имеем:

$$\left[\frac{125}{5}\right]+\left[\frac{125}{5^2}\right]+\left[\frac{125}{5^3}\right]+\left[\frac{125}{5^4}\right]=$$

$$=25+5+1+0=31,$$

то есть в произведении участвует 5^{31}.

Следовательно, произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ при $n=125$ оканчивается ровно 31 нулём, а оканчиваться 30 нулями это произведение ни при каком n не может.

Ответ. При $n=125$ оканчивается 31 нулём; 30 нулями оканчиваться не может.

Придадим алгоритму, полученному при решении примера 10, лаконичный вид. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ в математике обозначается символом $n!$ (читается «эн факториал»):

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Чтобы узнать, сколькими нулями может оканчиваться число $n!$, следует найти:

1) С каким показателем p_1 входит в это число число 2. Для этого необходимо найти сумму целых частей от деления n на степени числа 2.
2) С каким показателем p_2 входит в это число число 5. Для этого необходимо найти сумму целых частей от деления n на степени числа 5.
3) Если $p_1=p_2=p$, то число $n!$ оканчивается p нулями; если $p_1<p_2$ — p_1 нулями. Если $p_1>p_2$, то число $n!$ оканчивается p_2 нулями.

11. Сколькими нулями оканчивается число 100!?

Решение

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+$$

$$+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]+\left[\frac{100}{2^7}\right]=$$

$$=50+25+12+6+3+1+0=97$$

$$(p_1=97);$$

$$\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{5^2}\right]+\left[\frac{100}{5^3}\right]=20+4+0=24$$

$$(p_2=24).$$

Так как $24<97$, то число 100! оканчивается 24 нулями.

Ответ. 24.

12. Что больше: $100!$ или 10^{100}?

Решение

Пусть $A=100!$ и $B=10^{100}$.

Имеем:

$$A=(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9)\cdot(10\cdot11\cdot\ldots\cdot19)\cdot\ldots\times$$

$$\times\ldots\cdot(90\cdot91\cdot\ldots\cdot99)\cdot100>9!\cdot\left(\underbrace{10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{10\text{ раз}}\right)\times$$

$$\times\ldots\cdot\left(\underbrace{90\cdot90\cdot\ldots\cdot90}_{10\text{ раз}}\right)\cdot100=9!\cdot10^{10}\cdot\left(2^{10}\cdot10^{10}\right)\times$$

$$\times\left(3^{10}\cdot10^{10}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9^{10}\cdot10^{10}\right)\cdot10^2=$$

$$=9!\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9)^{10}\cdot10^{102}=9!\cdot(9!)^{10}\cdot10^{102}=$$

$$=(9!)^{11}\cdot10^{102}>B.$$

Тогда, тем более, $A>B$.

Ответ. $100!>10^{100}$.

13. Что больше: $\sqrt{\frac{2016}{2017}}$ или $\sqrt{\frac{2017}{2018}}$?

Решение

Способ 1. Пусть $2016=a$, тогда $2017=a+1$, $2018=a+2$. Сравним выражения

$$\frac{a}{a+1} \text{ и } \frac{a+1}{a+2}.$$

Имеем:

$$\frac{a}{a+1}\vee\frac{a+1}{a+2},$$

где знак «$\vee$» означает один из знаков «$>$», «$\geq$», «$<$», «$\leq$». Установим этот знак. Составим разность:

$$\frac{a}{a+1}-\frac{a+1}{a+2}\vee0,$$

$$\frac{a^2+2a-a^2-2a-1}{(a+1)(a+2)}\vee0,$$

$$\frac{-1}{(a+1)(a+2)}\vee0.$$

Знаменатель дроби больше нуля, так как $a>0$, поэтому

$$\frac{-1}{(a+1)(a+2)}<0.$$

Таким образом, знак «$\vee$» можно заменить знаком «$<$». Следовательно,

$$\frac{a}{a+1}<\frac{a+1}{a+2},$$

то есть

$$\frac{2016}{2017}<\frac{2017}{2018},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{2016}{2017}}<\sqrt{\frac{2017}{2018}}.$$

Способ 2. Сравним $\frac{2016}{2017}$ и $\frac{2017}{2018}$.

$$1-\frac{2016}{2017}=\frac{1}{2017};\quad 1-\frac{2017}{2018}=\frac{1}{2018}.$$

$$\frac{1}{2018}<\frac{1}{2017},$$

значит, число $\frac{2017}{2018}$ ближе к 1, чем число $\frac{2016}{2017}$. Следовательно, $\frac{2016}{2017}<\frac{2017}{2018}$, и $\sqrt{\frac{2016}{2017}}<\sqrt{\frac{2017}{2018}}$.

Ответ. $\sqrt{\frac{2017}{2018}}$ больше.

14. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 13, делится на 13 и имеет сумму цифр, равную 13.

Решение

Пусть x — искомое число, тогда разность $x-13$ оканчивается двумя нулями, делится на 13 и имеет сумму цифр, равную 9 (так как сумма цифр числа 13 равна 4).

Достаточно теперь найти наименьшее число, которое делится на 13 и имеет сумму цифр, равную 9, а потом приписать к нему справа 13.

Выписываем подряд делящиеся на 13 числа, находим, что наименьшее из них с суммой цифр, равной 9, — это число 117. Следовательно, искомое число — 11 713.

Ответ. 11 713.

15. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 71, которые после вычёркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

Решение

Пусть $y=100x+71$ — искомые натуральные числа ($x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$). Если зачеркнуть 71, то получим некоторое число x. Допустим, что число x в n раз меньше числа y. Отсюда имеем уравнение:

$$nx=y,$$

$$nx=100x+71,$$

$$x(n-100)=71.$$

Число 71 простое: $71=1\cdot 71$. Тогда

$$x(n-100)=71 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ n-100=71,\end{cases}\\ \begin{cases}x=71,\\ n-100=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ n=171,\end{cases}\\ \begin{cases}x=71,\\ n=101,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда получаем:

$$\left[\begin{array}{l}y=100\cdot 1+71=171,\\ y=100\cdot 71+71=7171.\end{array}\right.$$

Ответ. 171, 7171.

16. **Натуральное число M состоит из 1980 единиц и 1983 двоек, а остальные цифры — нули. Может ли это число быть точным кубом?**

Решение

Поскольку сумма цифр числа M делится на 3 (она равна $1980+2\cdot 1983=5946$), само число M также делится на 3. Если $M=n^3$, то и n делится на 3, откуда M делится на 27, а потому и на 9. Но это не так, поскольку сумма цифр числа M на 9 не делится. Значит, число M не может быть точным кубом.

Ответ. Не может.

17. **Двузначное число $\overline{ab}$ ($b\neq 0$) таково, что разность $\overline{ab}-\overline{ba}$ — точный квадрат. Найдите все двузначные числа, обладающие этим свойством. А существуют ли трёхзначные числа $\overline{abc}$ ($a>c$) с аналогичным свойством: $\overline{abc}-\overline{cba}$ — точный квадрат?**

Решение

Имеем:

$$\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=9(a-b).$$

По условию либо $a-b=1$, либо $b-a=1$ (так как $b\neq 0$). Отсюда имеем следующие числа: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95.

Так как

$$\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)=$$
$$=9\cdot 11\cdot (a-c)$$

не точный квадрат (может быть точным квадратом при $a-c=11$, что невозможно, так как a и c — цифры), то трёхзначных чисел, обладающих указанным свойством, не существует.

Ответ. 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95.

18. **Найдите все трёхзначные числа, сумма которых кратна 512, а частное кратно 7.**

Решение

Пусть x и y — искомые числа. Тогда

$$\begin{cases}x+y=512m,\\ \dfrac{x}{y}=7n,\end{cases}$$

где $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Отсюда $x=7y\cdot n$. Так как y — трёхзначное число, то $n=1$. Поэтому $x=7y$ и $7y+y=512m$, откуда

$$y=64m. \qquad (1)$$

Тогда

$$x=7\cdot 64m=448m. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) заключаем, что m принимает значения 1 и 2.

Если $m=1$, то $x=448\cdot 1=448$ и $y=64\cdot 1=64$.

Если $m=2$, то $x=448\cdot 2=896$ и $y=64\cdot 2=128$.

Ответ. 128 и 896.

19. **Сколько одинаковых членов находится в двух арифметических прогрессиях 4; 7; 10;... и 1; 5; 9;..., если в каждой из них по 1000 членов?**

Решение

Допустим, что некоторые члены данных арифметических прогрессий равны:

$$4+3(n-1)=1+4(m-1),$$
$$3n=4m-4,$$
$$n=\frac{4m-4}{3}=\frac{3m+m-4}{3}=$$
$$=m+\frac{m-4}{3},$$

где $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Так как при делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2, то положим $m=3t+r$, где $r\in\{0;1;2\}$.

Тогда $n=3t+r+\dfrac{3t+r-4}{3}=4t+r+\dfrac{r-4}{3}$.

При $r=0$ $n=4t-\dfrac{4}{3}$ — не натуральное число.

При $r=1$ $n=4t$.

При $r=2$ $n=4t+\dfrac{4}{3}$ — не натуральное число.

Отсюда при $n=4t$ по условию имеем неравенство $1\le 4t\le 1000$, откуда $\dfrac{1}{4}\le t\le 250$,

$$t=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 250.$$

Ответ. 250.

20. ([2], вар. 20 (19)). Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение

а) Пусть члены последовательности x и $13x$, $x \in \mathbb{N}$. По условию

$$x+13x=6075,$$

$$14x=6075.$$

Левая часть этого равенства чётная, а правая нечётна. Такое равенство невозможно.

б) Возьмём последовательность $13x$, x, $13x$. По условию $13x+x+13x=6075$, откуда $x=225$. Тогда $13x=13\cdot 225=2925$. Значит, имеем последовательность: 2925, 225, 2925.

в) Возьмём членами последовательности числа 1 и 13. Их сумма равна 14. Заметим, что

$$(6075-13):14=433.$$

Поэтому имеем последовательность 13, 1, 13, 1, 13, ..., 1, 13 — всего имеем 433 пары (1, 13) и число 13, то есть наибольшее количество членов последовательности — $433\cdot 2+1=867$.

Ответ. а) нет; б) да; в) 867.

21. ([2], вар. 19 (19)). Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить их произведение на четырёхзначное число. Однако он не заметил знака умножения и принял написанные рядом двузначное и трёхзначное числа за одно пятизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в семь раз больше истинного. Найдите все три числа.

Решение

Обозначим: $\overline{xy}$ — двузначное число, $\overline{zut}$ — трёхзначное число, $\overline{abcd}$ — четырёхзначное число.

По условию

$$\begin{cases}\overline{xy}\cdot\overline{zut}:\overline{abcd}=p,\\ \overline{xyzut}:\overline{abcd}=7p,\end{cases}$$

где $p\in\mathbb{N}$.

Далее имеем:

$$\begin{cases}7\overline{xy}\cdot\overline{zut}:\overline{abcd}=7p,\\ \overline{xyzut}:\overline{abcd}=7p,\end{cases}$$

откуда

$$7\overline{xy}\cdot\overline{zut}=\overline{xyzut},$$

$$7\overline{xy}\cdot\overline{zut}=\overline{xy}\cdot 1000+\overline{zut},$$

$$\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\overline{xy}\cdot 1000.$$

Так как $1000=2\cdot 500=4\cdot 250=5\cdot 200=8\cdot 125$, то

$$\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\left[\begin{array}{l}\left(2\overline{xy}\right)\cdot 500,\\ \left(4\overline{xy}\right)\cdot 250,\\ \left(5\overline{xy}\right)\cdot 200,\\ \left(8\overline{xy}\right)\cdot 125.\end{array}\right.$$

1) $\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\left(2\overline{xy}\right)\cdot 500$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7\overline{xy}-1=2\overline{xy},\\ \overline{zut}=500,\end{cases}\\ \begin{cases}7\overline{xy}-1=500,\\ \overline{zut}=2\overline{xy},\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{1}{5}, \quad (1)\\ \overline{zut}=500,\end{cases}\\ \begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{501}{7}, \quad (2)\\ \overline{zut}=2\overline{xy},\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда системы невозможны, так как равенства (1) и (2) противоречивы ($\overline{xy}$ — двузначное число, а правые части равенств — дроби).

2) $\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\left(4\overline{xy}\right)\cdot 250$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7\overline{xy}-1=4\overline{xy},\\ \overline{zut}=250,\end{cases}\\ \begin{cases}7\overline{xy}-1=250,\\ \overline{zut}=4\overline{xy},\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{1}{3},\\ \overline{zut}=250,\end{cases}\\ \begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{251}{7},\\ \overline{zut}=4\overline{xy}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Системы противоречивы.

3) $\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\left(5\overline{xy}\right)\cdot 200$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7\overline{xy}-1=5\overline{xy},\\ \overline{zut}=200,\end{cases}\\ \begin{cases}7\overline{xy}-1=200,\\ \overline{zut}=5\overline{xy},\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{1}{2},\\ \overline{zut}=200,\end{cases}\\ \begin{cases}\overline{xy}=\dfrac{201}{7},\\ \overline{zut}=5\overline{xy}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Этот случай также отпадает.

4) $\left(7\overline{xy}-1\right)\cdot\overline{zut}=\left(8\overline{xy}\right)\cdot 125$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7\overline{xy}-1=8\overline{xy},\\ \overline{zut}=125,\end{cases}\\ \begin{cases}7\overline{xy}-1=125,\\ \overline{zut}=8\overline{xy},\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\overline{xy}=-1,\\ \overline{zut}=125,\end{cases}\\ \begin{cases}\overline{xy}=18,\\ \overline{zut}=8\cdot 18.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\overline{xy}=-1$ — противоречие. Значит,

$$\begin{cases}\overline{xy}=18,\\ \overline{zut}=144.\end{cases}$$

Тогда $\overline{abcd}=18\cdot 144=2592$ или $\overline{abcd}=2592:2=1296$.

Проверка

$$\begin{cases}18\cdot 144:2592=1,\\ 18144:2592=7;\end{cases} \quad \begin{cases}18\cdot 144:1296=2,\\ 18144:1296=14.\end{cases}$$

Ответ. 18, 144, 1296; 18, 144, 2592.

22. (Задача А. А. Анджанса, ([3], M1032, с. 19). Выписаны n чисел 2, 3, ..., $n+1$, их всевозможные произведения по два, по три, и так далее вплоть до произведения всех этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $\frac{n}{2}$. (Например, при $n=3$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{3}{2}$.)

Доказательство

Воспользуемся методом математической индукции.

Обозначим через $A(n)$ данное предложение. $A(3)$ истинно (см. условие).

Докажем, что $A(k)\Rightarrow A(k+1)$.

Допустим, что $A(k)$ истинно, тогда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}=\frac{k}{2}.$$

Для $A(k+1)$ имеем:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}+$$

$$+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}\right)=$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2(k+2)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+2)}=\frac{k+1}{2}.$$

Таким образом, условия математической индукции выполнены, и потому $A(n)$ истинно для любого натурального n.

23. Может ли число, являющееся полным квадратом, записываться лишь с помощью цифр 0 и 6?

Решение

Число, являющееся полным квадратом и записывающееся цифрами 0 и 6, должно оканчиваться чётным числом нулей и после их отбрасывания оставаться квадратом. Оставшееся же число оканчивается либо на 06, либо на 66. А такие числа — чётные, но не делящиеся на 4, и поэтому не могут быть квадратами.

Ответ. Не может.

24. Сколько цифр содержит наименьшее число вида 111...1, делящееся на 999...9, состоящее из 1974 цифр?

Решение

Так как $999\ldots 9=9\cdot 111\ldots 1$, то число $a=111\ldots 1$ (n цифр) должно делиться на число $b=111\ldots 1$ (1974 цифры), а частное от деления должно делиться на 9. Из способа деления многозначных чисел ясно, что a делится на b только в том случае, когда a разбивается на «блоки», каждый из которых состоит из 1974 единиц:

$$a=\underbrace{111\ldots 1}_{1974}\underbrace{111\ldots 1}_{1974}\ldots\underbrace{111\ldots 1}_{1974},$$

а это верно, если n делится на 1974. Тогда частное $c=a:b$ имеет вид:

$$c=1\underbrace{00\ldots 01}_{1974}\underbrace{00\ldots 01}_{1974}\ldots\underbrace{00\ldots 01}_{1974}$$

и имеет в своей записи $n:1974$ единиц. Поэтому c делится на 9, если $n:1974$ делится на 9. Наименьшим числом n, удовлетворяющим условию задачи, будет $n=1974\cdot 9=17\,766$.

Ответ. 17 766.

25. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости друг к другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетевших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошёл к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошёл к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

Решение

Обозначим расстояния, пройденные Винни-Пухом и Пятачком через a и b соответственно, а время в пути до встречи — через x. Тогда скорость Винни-Пуха можно выразить двумя способами:

$$\frac{a}{x} \text{ или } \frac{b}{1}.$$

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{1}, \text{ откуда } x=\frac{a}{b}.$$

Скорость Пятачка также можно выразить двумя способами:

$$\frac{b}{x} \text{ или } \frac{a}{4}.$$

$$\frac{b}{x}=\frac{a}{4}, \text{ откуда } \frac{a}{b}=\frac{4}{x}.$$

Сравнивая полученные выражения для $\frac{a}{b}$, получим: $x=\frac{4}{x}$, откуда $x=2$ ($x=-2$ не подходит по смыслу задачи). Следовательно, Пятачок шёл $2+4=6$ (минут), а Винни-Пух — $2+1=3$ (минуты).

Ответ. Пятачок был в пути 6 минут; Винни-Пух был в пути 3 минуты.

26. Автопоезд длиной 20 м проезжает мимо телеграфного столба за 10 с. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 40 м?

Решение

То, что автопоезд длиной 20 м проезжает мимо телеграфного столба за 10 с, означает, что он проезжает 20 м за 10 с.

Для того чтобы начало головной секции автопоезда преодолело расстояние от одного конца моста до другого, потребуется 20 с и ещё 10 с, чтобы поезд выехал с моста. Всего для проезда через мост автопоезду потребуется 30 с.

Ответ. 30 с.

27. — Николай Иванович, — спросил Рамазан у знакомого продавца магазина, — сколько стоит тетрадь?

— 16 тетрадей стоят столько же рублей, сколько тетрадей можно купить на 100 рублей, — с улыбкой ответил продавец.

Сколько же стоит одна тетрадь?

Решение

Если 16 тетрадей стоят x рублей и за 100 рублей можно купить x тетрадей, то одна тетрадь стоит $x:16$ и $100:x$, то есть $x:16=100:x$, откуда $x^2=1600$, $x=40$ ($x=-40$ не подходит по смыслу задачи). Значит, одна тетрадь стоит $100:40=2{,}5$ (рубля).

Ответ. 2,5 рубля.

28. В трёх ящиках было 200 яблок. Когда из первого взяли $\frac{1}{3}$, из второго — $\frac{2}{5}$, а из третьего — $\frac{13}{15}$ содержащихся в них яблок, то оказалось, что всего взяли 70 яблок. Сколько бы яблок взяли, если бы из второго ящика взяли $\frac{1}{10}$, а из третьего — $\frac{4}{5}$ содержащихся в них яблок?

Решение

Если мы утроим количество яблок, взятых из каждого ящика, то полученные 210 яблок составят количество яблок в первом, втором и третьем ящиках плюс $\frac{1}{5}$ яблок второго ящика и $\frac{8}{5}$ — третьего. Поэтому $\frac{1}{5}$ яблок (второй ящик) и $\frac{8}{5}$ (третий ящик) составят $210-200=10$ (яблок). Но тогда $\frac{1}{10}$ яблок, взятых из второго ящика, и $\frac{4}{5}$ яблок, взятых из третьего ящика, составят 5 яблок.

Ответ. 5 яблок.

29. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором бидоне — $\frac{2}{3}$ его объёма, а в третьем бидоне — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака возможна такая ситуация?

Решение

Обозначим через t объём бака, а через x, y, z объёмы бидонов (в литрах). Получим соотношение:

$$\frac{t}{3}=\frac{x}{2}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{4},$$

или

$$4t=6x=8y=9z.$$

Наименьшее общее кратное чисел 4, 6, 8, 9 равно 72, поэтому каждое из чисел в полученной цепочке равенств должно быть кратно 72. Наименьший объём бака получим в том случае, когда каждое из них равно 72. Значит, $t=18$, $x=12$, $y=9$ и $z=8$.

Ответ. Объём бака 18 л, объёмы бидонов 12 л, 9 л, 8 л.

30. Полный бидон с молоком имеет массу 39 кг. Бидон, заполненный наполовину, имеет массу 20 кг. Какова масса пустого бидона?

Решение

Масса половины молока составляет $39-20=$ $=19$ (кг). Значит, масса молока — $19\cdot 2=38$ (кг). Тогда масса бидона — $39-38=1$ (кг).

Ответ. 1 кг.

31. Из 50 школьников 16 посещают математический кружок, 27 — кружок художественной самодеятельности, а 10 — оба кружка. Остальные не посещают эти кружки. Сколько школьников не посещают указанные кружки?

Решение

Оба кружка посещают 10 школьников. Значит, только математический кружок посещают $16-10=6$ (школьников), только кружок художественной самодеятельности — $27-10=17$ (школьников), а всего посещают какой-либо кружок вообще $6+17+10=33$ (школьника). Следовательно, не посещают указанные кружки $50-33=17$ (школьников).

Ответ. 17 школьников.

32. В районной олимпиаде по математике участвовали 70 человек, по физике — 35, по биологии — 21. Когда учащихся опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трёх» — втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учащихся участвовали в этих олимпиадах?

Решение

Пусть в одной олимпиаде участвовали x учащихся, тогда $\frac{x}{2}$ учащихся участвовали в двух олимпиадах и $\frac{x}{3}$ — в трёх. Имеем уравнение:

$$x+2\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x}{3}=70+35+21,$$

откуда

$$3x=126,\quad x=42.$$

Значит, всего в олимпиадах участвовали

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=42+\frac{42}{2}+\frac{42}{3}=42+21+14=77$$

учащихся.

Ответ. 77.

33. В школьной математической олимпиаде 11-х классов предлагалось для решения 10 задач. За каждую решённую задачу учащийся получает 5 очков, а за каждую нерешённую задачу с учащегося списывают 2 очка (считается, что учащийся, набравший больше штрафных очков, чем зачётных, набирает 0 очков). Какое наименьшее количество одиннадцатиклассников должно принять участие в олимпиаде, чтобы среди них было по крайней мере двое, набравших одинаковое число очков?

Решение

Составим таблицу зависимости числа набранных очков от числа решённых задач.

Таблица

Число решённых задач	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Число набранных очков	50	43	36	29	22	15	8	1	0	0

Из таблицы видно, что существует всего 8 различных возможностей получения очков. Отсюда наименьшее число учащихся должно быть равно 9. Тогда по крайней мере двое из них получат одинаковое число очков.

Ответ. 9.

34. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали упаковываются в ящики трёх типов: на 70, 40 и 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика соответственно 2000 руб., 1000 руб. и 700 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Решение

Пусть было x ящиков первого типа, y ящиков — второго и z — третьего. По условию

$$70x+40y+25z=1100$$

и сумма

$$2000x+1000y+700z$$

должна быть наименьшей.

Стоимость пересылки одной детали в ящиках первого типа составляет $\frac{200}{7}$ руб., в ящиках второго типа — 25 руб., третьего — 28 руб.

$$25<28<\frac{200}{7}.$$

Видим, что выгоднее всего пересылать детали в ящиках второго типа, и их должно быть больше всего — 27 ($1100:40=27$ (ост. 20)). Но тогда остаётся 20 деталей, которые (по условию задачи) нельзя будет переслать. Если $y=25$, а $z=4$ $(40\cdot25+25\cdot4=1100)$, то все условия задачи будут выполнены.

Ответ. 25 ящиков по 40 деталей и 4 ящика по 25 деталей.

35. Предполагается использовать 2 000 000 руб. на путёвки в дома отдыха. Имеются путёвки на 15, 27 и 45 дней. Стоимости их соответственно равны 21 000 руб., 40 000 руб., 60 000 руб. Сколько и каких нужно купить путёвок, чтобы общее число дней было наибольшим?

Решение

Пусть купили x путёвок на 15 дней, y путёвок на 27 дней и z путёвок на 45 дней. Тогда $21\,000x+40\,000y+60\,000z=2\,000\,000$

и сумма $15x+27y+45z$ — наибольшая.

Стоимость одного дня отдыха по путёвкам равна:

путёвка на 15 дней — $\frac{21\,000}{15}$ руб.; путёвка на 27 дней — $\frac{40\,000}{27}$ руб.; путёвка на 45 дней — $\frac{60\,000}{45}$ руб.

Поскольку

$$\frac{60\,000}{45}<\frac{21\,000}{15}<\frac{40\,000}{27}$$

(убедитесь в этом!), то выгоднее всего покупать путёвки на 45 дней; их можно купить не более 33, но тогда останутся неиспользованными 20 000 руб. Если же купить 32 путёвки по 60 000 руб., а на остальные 80 000 руб. — 2 путёвки по 40 000 руб., то будут израсходованы все деньги и путёвки будут куплены на наибольшее число дней.

Ответ. 32 путёвки на 45 дней и 2 путёвки на 27 дней.

36. В магазине покупатель приобрёл 3 кг масла по 400 руб. за килограмм, 12 кг конфет, 3 кг печенья, 5 кг колбасы по 120 руб. за килограмм. Покупателю выписали чек на 5470 руб. Не зная цены конфет и печенья, он обнаружил ошибку, которую кассир признал и исправил. Как покупатель обнаружил ошибку?

Решение

Цена за 1 кг колбасы кратна трём. Количество килограммов масла, количество килограммов конфет и количество килограммов печенья также кратны трём. Поэтому стоимость всей покупки должна быть кратна трём. Но 5470 не кратно трём. Значит, в чеке стоимость покупки была указана неверно.

37. Три ящика с шарами пронумерованы цифрами 1, 2 и 3. Над ящиком 1 написано «белые шары», над ящиком 2 — «чёрные шары», а над ящиком 3 — «белые или красные шары». Какого цвета шары находятся в каком ящике, если в каждом из ящиков находятся шары, цвет которых не соответствует указанному.

Решение

Оформим данные в виде таблицы.

Шары, цвет / Ящик, №	Белые	Чёрные	Красные
1	–	–	+
2	+	–	
3	–	+	–

Так как в первом ящике не белые, а во втором ящике — не чёрные шары, то в соответствующих ячейках ставим «–». Так как в третьем ящике не белые и не красные шары, ставим «–» в ячейках 3-Белые и 3-Красные. Тогда получаем, что в третьем ящике чёрные шары (ставим в ячейке 3-Чёрные «+», то есть чёрных шаров в первом ящике нет). Белых шаров нет ни в первом, ни в третьем ящиках, значит, белые шары находятся во втором ящике (ставим «+» в ячейке 2-Белые). Тогда в первом ящике — красные шары.

Ответ. В первом ящике красные шары, во втором ящике белые шары, в третьем ящике чёрные шары.

38. Некто говорит: «У меня нет братьев. Отцом человека, изображённого на портрете, является сын моего отца». Чей это портрет?

Решение

Допустим, что некто говорящий — женщина. Тогда из условия «...сын моего отца» следует, что у неё есть брат. А это противоречит условию «У меня нет братьев». Значит, некто — мужчина. Так как у этого мужчины нет братьев, то он является единственным сыном своего отца, и тогда он же является отцом человека, изображённого на портрете. То есть на портрете изображён ребёнок говорящего мужчины.

Ответ. Его ребёнка.

39. На международном конгрессе математиков выступили трое известных учёных A, B и C. Один из них — англичанин, второй — француз, третий — русский. О них известно следующее:

если C — француз, то B — русский; (1)

если C — русский, то B — англичанин; (2)
если B — не француз, то A — не русский; (3)
если A — англичанин, то C — русский. (4)

Кто из учёных англичанин, русский, француз?

Решение

Из (4) и (2) следует, что двое учёных — A и B — англичане. Это противоречит условию. Значит, A и B — не англичане, тогда англичанин — C.

Так как C — англичанин, то из (1): C — не француз и B — не русский. Поскольку B — не русский, то из условия (3) следует, что B — француз и тогда A — русский.

Ответ. A — русский, B — француз, C — англичанин.

40. В одной организации работают трое сотрудников — Морозов, Васильев и Токарев, и один из них математик. В процессе опроса каждый из них сделал два заявления. Морозов: «Я не математик. Васильев не математик». Васильев: «Морозов не математик. Токарев математик». Токарев: «Я не математик. Морозов математик». Далее было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал и один раз сказал правду. Кто из сотрудников является математиком?

Решение

Оформим данные в виде таблицы, обозначив высказывание «не математик» знаком «–», а высказывание «математик» знаком «+».

	Морозов	Васильев	Токарев
Морозов	–	–	
Васильев	–		+
Токарев	+		–

Можно начать с заявлений любого из сотрудников.

Способ 1. Начнём с заявлений Морозова. Допустим, что Морозов дважды сказал правду. Тогда математик — Токарев, и Токарев дважды солгал. Отсюда следует, что Васильев также дважды сказал правду. Таким образом, двое — Морозов и Васильев — сказали правду, что противоречит условию.

Морозов дважды солгать не может, так как в противном случае математиками окажутся двое — сам Морозов и Васильев. Получается, что Морозов один раз солгал и один раз сказал правду. Тут возможны два варианта.

1) Морозов: «Я математик. Васильев не математик». Тогда Васильев дважды солгал, а Токарев дважды сказал правду. Значит, математик — Морозов.
2) Морозов: «Я не математик. Васильев математик». Тогда Васильев и Токарев один раз солгали и один раз сказали правду. Таким образом, двое — Васильев и Токарев — один раз солгали и один раз сказали правду. А это противоречит условию.
Значит, математик — Морозов.

Способ 2. Начнём с Морозова.

Проба первая. Пусть Морозов дважды солгал. Тогда заявления примут вид:

— Я математик. Васильев математик.

Здесь имеем двух математиков — Морозова и Васильева. Противоречие условию.

Проба вторая. Пусть Морозов дважды сказал правду. Тогда математик — Токарев. Отсюда следует, что и Васильев дважды сказал правду. Таким образом получается, что Морозов и Васильев дважды сказали правду. Противоречие условию.

Проба третья. Пусть Морозов один раз сказал правду и один раз солгал. Здесь возможны два варианта.

1) «Я не математик. Васильев математик».
Тогда выходит, что Васильев один раз сказал правду («Морозов не математик») и один раз солгал («Токарев математик»), то есть двое — Морозов и Васильев — один раз солгали и один раз сказали правду. Противоречие условию.
2) «Я математик. Васильев не математик». Отсюда: Васильев дважды солгал («Морозов математик. Токарев не математик»), а Токарев дважды сказал правду.
Ответ. Морозов.

41. Рамазан, Султан и Замир учатся в 11 классе, и один из них посещает математический кружок. У них спросили: «Кто посещает кружок?», и ребята дали следующие ответы: Рамазан: «Кружок посещает Султан»; Султан: «Кружок посещает Замир»; Замир: «Кружок посещаю я». При этом оказалось, что один из них сказал правду, а двое солгали. Кто из ребят посещает математический кружок?

Решение

Оформим данные в виде таблиц, обозначая знаком «–» ложные ответы, а знаком «+» — правдивые (Рамазан может сказать либо правду, либо солгать).

Пусть Рамазан сказал неправду (*таблица 1*).

Таблица 1

	Рамазан	Султан	Замир
Рамазан		–	
Султан			+
Замир	+		

Из таблицы видно, что двое — Султан и Замир — сказали правду («Кружок посещает Замир»), что противоречит условию.

Пусть Рамазан сказал правду (*таблица 2*).

Таблица 2

	Рамазан	Султан	Замир
Рамазан		+	
Султан			–
Замир	–		

Из таблицы видно, что двое — Султан и Замир — сказали неправду. Следовательно, кружок посещает Султан.

Ответ. Султан.

42. В Хивском районе Дагестана часть жителей умеет говорить только по-табасарански, часть — только по-лезгински. По-табасарански говорят 95 % всех жителей, по-лезгински — 90 %. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

Решение

Примем число всех жителей района за 100 %. Тогда имеем:

$100\% - 90\% = 10\%$ всех жителей не говорят по-лезгински; $95\% - 10\% = 85\%$ говорят по-лезгински и по-табасарански.

Ответ. 85 %.

43. Вычислите сумму: $1 \cdot k + 2k^2 + 3k^3 + \ldots + nk^n$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение

Если $k = 1$, то имеем:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть $k \neq 1$. Заметим, что $1 \cdot k = k$, $2k^2 = k^2 + k^2$,

$$3k^3 = k^3 + k^3 + k^3, \ \ldots, \ nk^n = \underbrace{k^n + k^n + \ldots + k^n}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Составим таблицу:

Слагаемые	Столбцы, №				
	1	2	3	...	n
$1 \cdot k$	k				
$2k^2$	k^2	k^2			
$3k^3$	k^3	k^3	k^3		
...	...	...	...	...	
nk^n	k^n	k^n	k^n	...	k^n
Сумма чисел в столбцах	S_1	S_2	S_3	...	S_n

По таблице имеем:

$$S_1 = k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n,$$

$$S_2 = k^2 + k^3 + \ldots + k^n,$$

$$S_3 = k^3 + \ldots + k^n,$$

$$\ldots$$

$$S_n = k^n.$$

Заметим, что $S_2 = S_1 - k$, $S_3 = S_2 - k^2$, $S_4 = S_3 - k^3$, ..., $S_n = S_{n-1} - k^{n-1}$.

Суммы S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) являются суммами членов геометрических прогрессий со знаменателем $q = k$. Вычислим эти суммы:

$$S_1 = k \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1};$$

$$S_2 = k \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} - k = k\left(\frac{k^n - 1}{k-1} - 1\right) = k^2 \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k-1};$$

$$S_3 = k^2 \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k-1} - k^2 = k^2\left(\frac{k^{n-1} - 1}{k-1} - 1\right) = k^3 \cdot \frac{k^{n-2} - 1}{k-1};$$

$$\ldots$$

$$S_n = k^n \cdot \frac{k^{n-(n-1)} - 1}{k-1} = k^n \cdot \frac{k-1}{k-1} = k^n$$

(n-я строка содержит одно число — k^n). Отсюда

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n =$$

$$= \frac{k}{k-1}\left(k^n - 1 + k^n - k + k^n - k^2 + \ldots + k^n - k^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{k}{k-1}\left(nk^n - \left(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{k}{k-1}\left(nk^n - \frac{k^n - 1}{k-1}\right) =$$

$$=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{nk^n(k-1)-k^n+1}{k-1}=$$

$$=\frac{nk^{n+1}(k-1)-k^{n+1}+k}{(k-1)^2}=$$

$$=\frac{k^{n+1}((k-1)n-1)+k}{(k-1)^2}.$$

Ответ. $\frac{k^{n+1}((k-1)n-1)+k}{(k-1)^2}$.

44. Вычислите сумму: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}$.

Решение

Поскольку многочлен $k^3+6k^2+11k+6$ имеет различные корни (-1, -2 и -3), то методом неопределённых коэффициентов разложим данную дробь на элементарные дроби. Имеем:

$$\frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}=\frac{x}{k+1}+\frac{y}{k+2}+\frac{z}{k+3},$$

или

$$\frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}=$$

$$=\frac{k^2(x+y+z)+k(5x+4y+3z)+(6x+3y+2z)}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\5x+4y+3z=0,\\6x+3y+2z=1,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$, $z=\frac{1}{2}$.

Значит,

$$\frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+2}.$$

Теперь имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+6k^2+11k+6}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)=\frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}.$$

Ответ. $\frac{n(n+5)}{12(n+2)(n+3)}$.

45. Пишут натуральные числа от 1 до $\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ цифр}}$. Сколько раз будет написана цифра 1?

Решение

- От 1 до 9 цифра 1 будет написана 1 раз;
- от 10 до 99 — 11 раз в первом десятке и в каждом из следующих десятков по одному разу (21, 31, 41, ..., 91), то есть 19 раз;
- от 100 до 999 — 100 раз на первом месте в первой сотне, 10 раз на втором месте в каждой сотне и 10 раз в каждой сотне в разряде единиц, то есть $100+90+90=280$ раз, и т. д.

Составим по нашим наблюдениям алгоритм. Имеем:

- от 1 до 9 единица будет написана 1 раз: $1=1\cdot10^0$;
- от 1 до 99 — $19+1=20$ раз: $20=2\cdot10^1$;
- от 1 до 999 — $1+19+280=300$ раз: $300=3\cdot10^2$;
- ...
- от 1 до $\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ цифр}}$ — $n\cdot10^{n-1}$ раз.

Ответ. $n\cdot10^{n-1}$ раз.

46. Дан ряд чисел $2017>2016>2015>\ldots>1$. Докажите, что разность между крайними числами (2017 и 1) равна сумме всех разностей между последовательными данными числами.

Доказательство

Имеем:

$$2017-2016=1,$$

$$2016-2015=1,$$

$$2015-2014=1,$$

$$\ldots$$

$$2-1=1$$

(всего 2016 равенств).

Сложив почленно эти равенства, получим: $2017-1=2016\cdot1$, то есть $2016=2016$, что и требовалось доказать.

47. Докажите, что куб натурального числа есть разность квадратов двух чисел, одно из которых кратно 3.

Доказательство

Пусть n — натуральное число, тогда

$$n^3 = \frac{n^2}{4}\cdot 4n = \frac{n^2}{4}\left((n+1)^2-(n-1)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 - \left(\frac{n}{2}(n-1)\right)^2.$$

Числа $n-1$ и $n+1$ последовательные, следовательно, одно из них кратно 3, а его квадрат делится нацело на 9.

48. Докажите, что если n — нечётное натуральное число и $n \neq 1$, то число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится нацело на 512.

Доказательство

Разложим многочлен $n^{12}-n^8-n^4+1$ на множители. Имеем:

$$n^{12}-n^8-n^4+1 = n^8\left(n^4-1\right)-\left(n^4-1\right) =$$

$$=\left(n^4-1\right)\left(n^8-1\right) = \left(n^2+1\right)^2(n+1)^2(n-1)^2\left(n^4+1\right).$$

Поскольку n — нечётное, то число $n-1$ — чётное и делится на 2, а его квадрат делится на 4; $n+1$ — чётное число и делится на 4 (так как $n-1$ делится на 2), а его квадрат делится на 16; n^2+1 — число чётное и делится на 2. Следовательно, произведение указанных делителей равно $4\cdot 16\cdot 4\cdot 2 = 512$.

49. Какая из дробей больше: $\frac{x-y}{x+y}$ или $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (при $x>0$, $y>0$, $x>y$)?

Решение

Составим разность:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{x-y}{x+y} = (x-y)\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}-\frac{1}{x+y}\right) =$$

$$=(x-y)\cdot\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)} =$$

$$=\frac{2xy(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}.$$

Поскольку $x>0$, $y>0$, $x>y$, то $x-y>0$ и значит,

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > \frac{x-y}{x+y}.$$

Ответ. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > \frac{x-y}{x+y}$.

50. При каком натуральном n дробь $\frac{n+2}{n-1}$ есть натуральное число?

Решение

Выделим целую часть дроби:

$$\frac{n+2}{n-1} = \frac{(n-1)+3}{n-1} = 1+\frac{3}{n-1},$$

откуда $n-1$ — делитель числа 3, то есть 1 или 3.

Если $n-1=1$, то $n=2$; если $n-1=3$, то $n=4$.

Ответ. 2; 4.

51. Найдите два натуральных числа, сумма обратных чисел которых равна 1.

Решение

Обозначим искомые числа через x и y. Тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,$$

откуда имеем:

$$\frac{1}{y}=1-\frac{1}{x},$$

$$y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}. \qquad (1)$$

Дробь $\frac{1}{x-1}$ — целое число (так как $y\in\mathbb{N}$), если $x-1=1$, то есть $x=2$. Но из равенства (1) при $x=2$ имеем $y=2$. Значит, искомые числа равны и каждое из них равно 2.

Ответ. 2 и 2.

52. **Докажите, что если к числителю и знаменателю несократимой обыкновенной дроби прибавить числа, равнократные членам этой дроби, то дробь не изменит своей величины.**

Доказательство

Пусть $\frac{x}{y}$ — данная дробь и НОД$(x;y)=1$.

Рассмотрим дробь $\frac{x+xt}{y+yt}$, где $t\in\mathbb{N}$. Имеем:

$$\frac{x+xt}{y+yt}=\frac{x(1+t)}{y(1+t)}=\frac{x}{y},$$

что и требовалось доказать.

(*Пример*. Дана дробь $\frac{3}{4}$. Имеем: $3+3\cdot 5=18$; $4+4\cdot 5=24$; $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$.)

53. Докажите, что для натурального числа $n = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$ ($\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}$) число всех делителей равно $(\alpha+1)(\beta+1)$.

Доказательство

Число n делится на

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{\alpha}, \qquad (1)$$

то есть имеет $\alpha+1$ делитель, и в то же время делится на

$$1,\ b,\ b^2,\ \ldots,\ b^{\beta}, \qquad (2)$$

то есть имеет ещё $\beta+1$ делитель.

Среди делителей числа n будут числа вида $a^k b^p$. Как получить все делители числа n? Возьмём делители ряда (2) и будем их последовательно умножать на делители ряда (1). Тогда получим:

- ✓ для 1: $1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{\alpha}$ ($\alpha+1$ делитель);
- ✓ для b: $b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ \ldots,\ ba^{\alpha}$ ($\alpha+1$ делитель)

и т. д. для каждого делителя ряда (2). Так как в ряде (2) чисел $\beta+1$, то общее число делителей числа n равно $(\alpha+1)(\beta+1)$.

54. Найдите число делителей и сами делители числа: а) 512; б) 4608.

Решение

Воспользуемся задачей 53.

а) $512 = 2^9$, число делителей равно $9+1=10$ — $1;\ 2;\ 2^2=4;\ 2^3=8;\ 2^4=16;\ 2^5=32;\ 2^6=64;\ 2^7=128;\ 2^8=256;\ 2^9=512$.

б) $4608 = 512 \cdot 9 = 2^9 \cdot 3^2$, число делителей равно $(9+1)(2+1)=30$. Так как число 9 имеет три делителя: 1, 3, 9, то число 4608 будет иметь:

- ✓ 10 делителей для множителя 512 (*см. а*));
- ✓ 10 делителей, которые получаются из делителей числа 512 соответственно умножением их на 3;
- ✓ 10 делителей, которые получаются из делителей числа 512 соответственно умножением их на 9.

Значит, всего делителей $10+10+10=30$. Найти эти делители предлагаем самостоятельно.

Ответ. а) 10 делителей; 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512; б) 30 делителей.

55. Найдите двузначное натуральное число, равное удвоенному произведению цифр этого числа.

Решение

Пусть $n = \overline{xy}$ — искомое число, $n = 10x + y$. По условию задачи имеем уравнение

$$10x + y = 2xy.$$

Из уравнения видим, что n — число чётное и $y \neq 0$ (так как $n \neq 0$). Очевидно, что $x \neq 1$ так как при $x=1$ $y=10$, что невозможно); $x \neq 2$ (так как при $x=2$ $y = 6\frac{2}{3}$, что невозможно). С другой стороны, y — число чётное (так как $y = 2xy - 10x$ есть разность двух чётных чисел) и значит, $y=2$ или $y=4$, или $y=6$, или $y=8$.

При $y=2$ $x<0$, что невозможно; при $y=4$ $x<0$, что невозможно; при $y=6$ $x=3$ — имеем решение $n=36$; при $y=8$ $x=1\frac{1}{3}$, что невозможно. Таким образом, искомое число — 36.

Ответ. 36.

56. Найдите такое трёхзначное натуральное число, что, удвоив его, получили бы число, выражающее число цифр, необходимое для написания всех последовательных натуральных чисел от 1 до этого искомого трёхзначного числа.

Решение

Пусть x — искомое натуральное трёхзначное число. Определим, сколько потребуется цифр для написания всех последовательных натуральных чисел от 1 до x включительно.

Для написания однозначных чисел потребуется 9 цифр, двузначных — $2 \cdot 90 = 180$ цифр, трёхзначных от 100 до x включительно — $3(x-99)$ цифр.

Имеем уравнение:

$$2x = 9 + 180 + 3(x-99),$$

откуда $x = 108$.

Ответ. 108.

57. Найдите двузначное натуральное число, которое равно утроенному произведению его цифр.

Решение

Пусть $n = \overline{xy}$ — искомое двузначное число, $n = 10x + y$. Тогда

$$10x + y = 3xy,$$

$$y = \frac{10x}{3x-1}, \text{ или } y = x \cdot \frac{10}{3x-1}.$$

$\frac{10}{3x-1}$ — целое число. Так как $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$, то $\frac{10}{3x-1}$ может быть равно 1, 2, 5 или 10.

Имеем:

1) $\dfrac{10}{3x-1}=1$, $3x=11$, откуда $x=\dfrac{11}{3}$ — дробное число, что невозможно.

2) $\dfrac{10}{3x-1}=2$, $3x=6$, $x=2$; тогда $y=4$ и $n=24$.

3) $\dfrac{10}{3x-1}=5$, $3x=3$, $x=1$; тогда $y=5$ и $n=15$.

4) $\dfrac{10}{3x-1}=10$, $3x=2$, откуда $x=\dfrac{2}{3}$ — дробное число, что невозможно.

Ответ. 15; 24.

58. Три натуральных числа имеют наибольший общий делитель, равный 17, и наименьшее общее кратное, равное 1785. Сумма этих чисел равна 255. Найдите эти числа.

Решение

Пусть a, b и c — искомые числа. Тогда по условию имеем систему:

$$\begin{cases} a+b+c=255, \\ a=17x, \\ b=17y, \\ c=17z, \\ 17xyz=1785, \end{cases}$$

(где $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{N}$), откуда

$$\begin{cases} x+y+z=15, \\ xyz=105. \end{cases}$$

Заметим, что $3\cdot5\cdot7=105$ и $3+5+7=15$. Следовательно, $x=3$, $y=5$, $z=7$ и тогда $a=17\cdot3=51$, $b=17\cdot5=85$ и $c=17\cdot7=119$.

Ответ. 51, 85, 119.

59. Найдите два натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен 26, а наименьшее общее кратное — 546.

Решение

Пусть $n_1=26x$, $n_2=26y$ ($x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$). Тогда $546=26xy$, или $xy=21$. Составим таблицу:

x	1	3
y	21	7
n_1	26	78
n_2	546	182

Других решений нет.

Ответ. 21 и 26; 78 и 182.

60. Известно, что $a+b+c=2018$ и

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{2018}.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

Решение

$$a+b+c=2018,$$

откуда

$$a=2018-(b+c),$$
$$b=2018-(a+c),$$
$$c=2018-(a+b).$$

Тогда

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2018-(b+c)}{b+c}+$$
$$+\frac{2018-(a+c)}{a+c}+\frac{2018-(a+b)}{a+b}=$$
$$=\frac{2018}{b+c}-1+\frac{2018}{a+c}-1+\frac{2018}{a+b}-1=$$
$$=2018\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3=$$
$$=2018\cdot\frac{1}{2018}-3=1-3=-2.$$

Ответ. -2.

61. Известно, что $\dfrac{x-y}{y}=2016$. Найдите значение выражения $\dfrac{2018x-2017y}{x}$.

Решение

Способ 1

1) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2018x-2017y}{x}=\frac{2018x-2018y+y}{x}=$$
$$=\frac{2018(x-y)+y}{x}=2018\cdot\frac{x-y}{x}+\frac{y}{x}=$$
$$=2018\left(1-\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}. \qquad (1)$$

2) $\dfrac{x-y}{y}=2016$, откуда имеем:

$$\frac{x}{y}-1=2016,\ \frac{x}{y}=2017,$$
$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2017}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем:

$$2018\left(1-\frac{1}{2017}\right)+\frac{1}{2017}=2018\cdot\frac{2016}{2017}+\frac{1}{2017}=$$

$$=\frac{2018\cdot 2016+1}{2017}=\frac{(2017+1)\cdot 2016+1}{2017}=$$

$$=\frac{2017\cdot 2016+2017}{2017}=2017.$$

Способ 2

Из равенства $\frac{x-y}{y}=2016$ имеем $x=2017y$, тогда

$$\frac{2018x-2017y}{x}=\frac{2018x-x}{x}=\frac{2017x}{x}=2017.$$

Способ 3

Из равенства $\frac{x-y}{y}=2016$ имеем $\frac{x}{y}-1=2016$, $\frac{x}{y}=2017$, $\frac{y}{x}=\frac{1}{2017}$.

$$\frac{2018x-2017y}{x}=2018-2017\cdot\frac{y}{x}=$$

$$=2018-2017\cdot\frac{1}{2017}=2017.$$

Ответ. 2017.

62. Вычислите $a^4+b^4+c^4$, если $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$.

Решение

Способ 1

Из условия $a^2+b^2+c^2=1$ имеем:

$$a^2+b^2=1-c^2. \qquad (*)$$

Из условия $a+b+c=0$ имеем: $c=-a-b$; $c^2=(-a-b)^2=a^2+b^2+2ab$. Учитывая (*), получим:

$$c^2=1-c^2+2ab,$$

$$2ab=2c^2-1,$$

$$ab=\frac{2c^2-1}{2}.$$

Тогда

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2\right)^2+c^4-2(ab)^2=$$

$$=\left(1-c^2\right)^2+c^4-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2=$$

$$=1-2c^2+c^4+c^4-\frac{1}{2}\left(4c^4-4c^2+1\right)=$$

$$=2c^4-2c^2+1-2c^4+2c^2-\frac{1}{2}=$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Способ 2

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right).$$

Возведём в квадрат равенство $a+b+c=0$.

Имеем: $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$, откуда $ab+ac+bc=-\frac{1}{2}$, тогда $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{4}$.

Значит, $a^4+b^4+c^4=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

63. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}{1+\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^2}.$$

Решение

Упростим данное выражение. Имеем:

$$\frac{1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}{1+\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{\sqrt{1+a^2}\left(1+\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{2\sqrt{1+a^2}\left(1+a^2+a\sqrt{1+a^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{2\sqrt{1+a^2}\left(\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2+a\sqrt{1+a^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{2\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2\left(\sqrt{1+a^2}+a\right)}=\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

Наибольшее значение данного выражения равно $\frac{1}{2}$ при $a=0$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

64. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{a^2}{1+a^4}.$$

Решение

Поскольку

$$\frac{1+a^4}{a^2}=\frac{1}{a^2}+a^2\geq 2$$

(как сумма двух взаимно обратных положительных величин), то $\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}$. Таким образом, наибольшее значение выражения равно $\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

65. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}$, если $a+b+c=1$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

Решение

Поскольку $a+b+c=1$, то $2a+2b+2c=2$, $2a+2b+2c-2=0$.

Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}=$$

$$=\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}+2a+2b+2c-2=$$

$$=\left(2a+\frac{2a^2}{b+c}\right)+\left(2b+\frac{2b^2}{c+a}\right)+\left(2c+\frac{2c^2}{a+b}\right)-2=$$

$$=2a\cdot\frac{a+b+c}{b+c}+2b\cdot\frac{a+b+c}{c+a}+2c\cdot\frac{a+b+c}{a+b}-2=$$

$$=2a\cdot\frac{1}{b+c}+2b\cdot\frac{1}{c+a}+2c\cdot\frac{1}{a+b}-2=$$

$$=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}-2. \qquad (1)$$

Теперь преобразуем выражение

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}.$$

Пусть $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$. Тогда $a+b+c=x+y+z$; $a=y+z-x$, $b=x+z-y$, $c=x+y-z$.

Имеем:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=$$

$$=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=$$

$$=\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\geq$$

$$\geq 2+2+2-3=3 \qquad (2)$$

(так как каждая скобка содержит сумму двух взаимно обратных положительных величин).

Из равенства (1) и неравенства (2) следует, что

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\geq 1.$$

Значит, наименьшее значение выражения равно 1.

Ответ. 1.

66. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right),$$

если $a+b+c=0$.

Решение

Пусть $\frac{a-b}{c}=x$, $\frac{b-c}{a}=y$, $\frac{c-a}{b}=z$. Тогда данное выражение принимает вид:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}. \quad (*)$$

Имеем:

$$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=$$

$$=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=$$

$$=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(-a-b+c)}{ab}=$$

$$=\frac{c}{ab}\cdot(-a-b+c)=\frac{c}{ab}\left(-(a+b+c)+2c\right)=\frac{2c^2}{ab}. \qquad (1)$$

Выполнив круговую перестановку $a\to b\to c\to a$ в равенстве (1), получим:

$$\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}. \qquad (2)$$

Теперь, выполнив круговую перестановку $b\to c\to a\to b$ в равенстве (2), получим:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}. \qquad (3)$$

Из равенств (1) – (3) имеем:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=$$

$$=\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)=\frac{2}{abc}\cdot 3abc=6.$$

Значит (*см.* (*)),

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+6=9.$$

Ответ. 9.

67. Решите в неотрицательных целых числах уравнение $x^2-y^2=100$.

Решение

Очевидно, что $x>y$; $100=(x-y)(x+y)$. Поскольку $100=2\cdot 50=4\cdot 25=5\cdot 20=10\cdot 10$, получаем четыре случая:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ x+y=50, \end{cases}$

откуда $x=26$, $y=24$.

2) $\begin{cases} x-y=4, \\ x+y=25, \end{cases}$

откуда $x=14{,}5$, $y=10{,}5$, что не удовлетворяет условию.

3) $\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=20, \end{cases}$

откуда $x=12{,}5$, $y=7{,}5$, что не удовлетворяет условию.

4) $\begin{cases} x-y=10, \\ x+y=10, \end{cases}$

откуда $x=10$, $y=0$.

Ответ. $(26;24)$; $(10;0)$.

68. Решите уравнение $\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2018}}$.

Решение

Упростив левую часть уравнения (*см. задачу 63*), получим:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2018}},$$

откуда

$$1+x^2=2018,\ x^2=2017,\ x_1=-\sqrt{2017},\ x_2=\sqrt{2017}.$$

Ответ. $-\sqrt{2017}$, $\sqrt{2017}$.

69. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1440}.$$

Решение

Заметим, что $x\geq 0$ и $y\geq 0$.

Данное уравнение симметрично относительно неизвестных x и y, так как при круговой перестановке $x\to y\to x$ оно переходит само в себя. Отсюда, если пара $(x_0;y_0)$ — решение уравнения, то его решением будет и пара $(y_0;x_0)$.

Вначале найдём решения вида $(x_0;y_0)$.

Так как

$$\sqrt{1440}=\sqrt{144\cdot 10}=12\sqrt{10},$$

то имеем:

$$12\sqrt{10}=0\cdot\sqrt{10}+12\sqrt{10}=\sqrt{0}+\sqrt{1440},$$

откуда

$$x=0,\ y=1440;$$

$$12\sqrt{10}=1\cdot\sqrt{10}+11\sqrt{10}=\sqrt{10}+\sqrt{1210},$$

откуда

$$x=10,\ y=1210;$$

$$12\sqrt{10}=2\sqrt{10}+10\sqrt{10}=\sqrt{40}+\sqrt{1000},$$

откуда

$$x=40,\ y=1000;$$

$$12\sqrt{10}=3\sqrt{10}+9\sqrt{10}=\sqrt{90}+\sqrt{810},$$

откуда

$$x=90,\ y=810;$$

$$12\sqrt{10}=4\sqrt{10}+8\sqrt{10}=\sqrt{160}+\sqrt{640},$$

откуда

$$x=160,\ y=640;$$

$$12\sqrt{10}=5\sqrt{10}+7\sqrt{10}=\sqrt{250}+\sqrt{490},$$

откуда

$$x=250,\ y=490;$$

$$12\sqrt{10}=6\sqrt{10}+6\sqrt{10}=\sqrt{360}+\sqrt{360},$$

откуда

$$x=360,\ y=360.$$

Таким образом, получаем следующие пары $(x_0;y_0)$: $(0;1440)$, $(10;1210)$, $(40;1000)$, $(90;810)$, $(160;640)$, $(250;490)$, $(360;360)$.

Тогда решениями данной системы уравнений будут также и пары $(1440;0)$, $(1210;10)$, $(1000;40)$, $(810;90)$, $(640;160)$ и $(490;250)$.

Ответ. $(0;1440)$, $(10;1210)$, $(40;1000)$, $(90;810)$, $(160;640)$, $(250;490)$, $(360;360)$, $(1440;0)$, $(1210;10)$, $(1000;40)$, $(810;90)$, $(640;160)$, $(490;250)$.

70. Решите уравнение $(3x-1)\sqrt{x-4}=17\sqrt{2}$.

Решение

Заметим, что $x\geq 4$.

Предположим, что множители, содержащие корни, равны. Тогда имеет место система уравнений

$$\begin{cases}3x-1=17,\\ \sqrt{x-4}=\sqrt{2},\end{cases}$$

решив которую, получим: $x=6$.

Легко проверить, что число 6 является корнем данного уравнения.

Докажем, что других корней данное уравнение не имеет. Действительно, при $x>6$ справедлива следующая система неравенств:

$$\begin{cases}3x-1>17,\\ \sqrt{x-4}>\sqrt{2}.\end{cases}$$

Тогда

$$(3x-1)\sqrt{x-4}>17\sqrt{2}.$$

Если $4\leq x\leq 6$, то имеет место система неравенств

$$\begin{cases}3x-1<17,\\ \sqrt{x-4}<\sqrt{2},\end{cases}$$

то есть

$$(3x-1)\sqrt{x-4}<17\sqrt{2}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x=6$.

Ответ. 6.

71. Дано уравнение $x^3+4x-4=0$. Докажите, что: а) уравнение имеет единственный корень; б) этот корень иррационален.

Доказательство

а) Функция $f(x)=x^3+4x-4$ при $x\in\mathbb{R}$ — возрастающая, так как $f'(x)=3x^3+4>0$. Значит, график этой функции пересекает ось абсцисс в единственной точке x_0, то есть x_0 — единственный корень данного уравнения.

б) Заметим, что $f(0,8)=-2,88<0$ и $f(0,9)=0,329>0$. Тогда $x\in(0,8;0,9)$.

Пусть x_0 — рациональное число, тогда $x_0=\dfrac{a}{b}$ — несократимая дробь ($a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$; если дробь сократимая, то её предварительно сокращаем). Уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+4\left(\frac{a}{b}\right)-4=0,$$

или

$$a^2+4b^2=\frac{4b^3}{a}.$$

Из этого равенства следует, что a — делитель числа 4 (так как числа a и b взаимно простые). Значит, a может быть равно одному из чисел 1, 2, 4. Но ни одна из дробей $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{2}{b}$, $\dfrac{4}{b}$ (при $b\in\mathbb{N}$) не принадлежит промежутку $(0,8;0,9)$. Этим и доказана иррациональность корня x_0.

72. Решите уравнение $x^{10}-x^7+x^2-x+1=0$.

Решение

Заметим, что $x\in\mathbb{R}$. Разобьём множество $\mathbb{R}$ на подмножества $(-\infty;0]$, $(0;1)$, $[1;+\infty)$ и рассмотрим на каждом из них функцию $f(x)=x^{10}-x^7+x^2-x+1$.

Если $x\in(-\infty;0]$, то $x^{10}\geq 0$, $-x^7\geq 0$, $x^2\geq 0$, $-x\geq 0$ и $f(x)>0$;

если

$$x\in(0;1),$$

то

$$f(x)=x^{10}+x^2\left(1-x^5\right)+(1-x)>0;$$

если

$$x\in[1;+\infty),$$

то

$$f(x)=x^7\left(x^3-1\right)+x(x-1)+1>0.$$

Таким образом, равенство $f(x)$ нулю не достигается при $x\in\mathbb{R}$.

Ответ. Решений нет.

73. Решите уравнение $ax^2+bx+b=0$, если известно, что его корни — целые.

Решение

Предположим сначала, что $a\neq 0$, $b\neq 0$. Пусть m и n — корни данного уравнения. Тогда по теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} m+n=-\dfrac{b}{a}, \\ mn=\dfrac{b}{a}, \end{cases}$$

откуда

$$n+n=-mn,$$

$$m+n+mn=0,$$

$$(m+1)(n+1)-1=0,$$

$$(m+1)(n+1)=1.$$

Получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1=-1, \\ n+1=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} m+1=1, \\ n+1=1, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=-2, \\ n=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} m=0, \\ n=0, \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда $m=-2$, $n=-2$ (так как при $m=n=0$ по уравнению имеем $b=0$, что противоречит нашему предположению).

Если $a=0$, $b\neq 0$, то данное уравнение принимает вид $0\cdot x^2+bx+b=0$, или $bx=-b$, откуда $x=-1$.

Если $a\neq 0$, $b=0$, то данное уравнение принимает вид $ax^2+0\cdot x+0=0$, или $ax^2=0$, откуда $x=0$.

Наконец, если $a=0$, $b=0$, то получим: $0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$, откуда x — любое число (заметим, что в данном случае уравнение может иметь и нецелые корни).

Ответ. При $a\neq 0$, $b\neq 0$ $x=-2$; при $a=0$, $b\neq 0$ $x=-1$; при $a\neq 0$, $b=0$ $x=0$; при $a=b=0$ x — любое число.

74. Пусть $a+b+c<0$ и уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней. Какой знак имеет c?

Решение

Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда $f(0)=c$ и $f(1)=a+b+c<0$ (по условию). Графиком функции $f(x)$ является парабола, проходящая через точки $(0;c)$ и $(1;a+b+c)$. Отсюда $c<0$, иначе парабола пересекала бы ось абсцисс, что противоречит условию ($ax^2+bx+c=0$ не имеет корней).

Ответ. $c<0$.

75. Решите систему

$$\begin{cases} y^2-2x+1=0, \\ z^2-2y+1=0, \\ x^2-2z+1=0. \end{cases}$$

Решение

Перепишем данную систему в равносильном виде:

$$\begin{cases} y^2=2x-1, \\ z^2=2y-1, \\ x^2=2z-1. \end{cases}$$

Поскольку $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$, $z^2\geq 0$, то

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0, \\ 2y-1\geq 0, \\ 2z-1\geq 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что

$$x\geq\frac{1}{2},\ y\geq\frac{1}{2},\ z\geq\frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Сложим почленно равенства данной системы, получим:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0,$$

откуда

$$x=y=z=1.$$

Если хотя бы одно из чисел x, y, z принадлежит промежуткам (*см.* (*)) $\left[\frac{1}{2};1\right)$, $(1;+\infty)$, то $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>0$. Таким образом, $(1;1;1)$ — единственное решение.

Ответ. $(1;1;1)$.

В заключении рассмотрим вопрос

«Математика на циферблате правильно идущих часов»

Решение любой задачи требует её математизации, то есть перевода условия задачи на математический язык — язык символов.

С. Р. Сефибеков

Часто учителя предлагают учащимся задачи, связанные с движением стрелок на циферблате правильно идущих часов. Такие задачи развивают логическое мышление, зрительную память, острый глазомер, творческое мышление, способствуют формированию навыков исследовательской деятельности. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача

Часы показывают полдень.

1. Через сколько часов впервые совпадут:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки?
2. Сколько раз за сутки совпадут:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки;
   г) все три стрелки?
3. Сколько раз в сутки образуют прямой угол:
   а) минутная и часовая стрелки;
   б) секундная и минутная стрелки;
   в) секундная и часовая стрелки?

Вспомогательные предложения

Предложение 1. Циферблат часов содержит 60 делений. Стрелка часов, описывая полный круг циферблата, поворачивается на 360°. Тогда на одно деление приходится $360°:60=6°$.

Предложение 2. Если минутная стрелка часов поворачивается на одно деление, то секундная стрелка поворачивается на 60 делений (делает полный оборот, то есть поворачивается на 360°). Значит, секундная стрелка движется в 60 раз быстрее минутной.

Предложение 3. Если часовая стрелка поворачивается на 5 делений (на $5\cdot 6°=30°$, то есть отсчитывает 1 час), то минутная стрелка поворачивается на 60 делений (на 360°). Значит, минутная стрелка движется в $360°:30°=12$ раз быстрее часовой.

Предложение 4. Если часовая стрелка поворачивается на 5 делений (на $5\cdot 6°=30°$, то есть отсчитывает 1 час), то секундная стрелка поворачивается на

$$60\cdot 60=3600$$

делений (на $3600\cdot 6°$). Значит, секундная стрелка движется в $3600\cdot 6°:30°=720$ раз быстрее часовой.

Решение

1. а) Первый раз минутная и часовая стрелки совпадут после 13.00. Пусть после 13.00 часовая стрелка до совпадения с минутной повернулась на $x°$. Тогда, если отсчитывать от начального положения, часовая стрелка до совпадения с минутной повернётся на $30°+x°$, а минутная (до совпадения) — на

$$360°+30°+x°=390°+x°.$$

Отсюда имеем уравнение (*см. предложение 3*):

$$390+x=12(30+x),$$

откуда

$$x=\frac{30}{11}.$$

Значит,

$$30°+x°=30°+\left(\frac{30}{11}\right)°=\left(\frac{360}{11}\right)°.$$

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, ч	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Часовая	30	1	Пропорциональная
Минутная	$\frac{360}{11}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{30}{\frac{360}{11}}=\frac{1}{t},$$

откуда

$$t=1\frac{1}{11}.$$

Значит, впервые после полудня минутная и часовая стрелки совпадут через $1\frac{1}{11}$ часа.

б) Если минутная стрелка поворачивается на одно деление (на 6°), то секундная стрелка поворачивается на 60 делений (360°). Значит, совпадение произойдёт после того, как минутная стрелка повернётся на одно деление. Допустим, что после пройденного одного деления минутная стрелка повернулась на $x°$ до совпадения с секундной стрелкой. Тогда минутная стрелка до совпадения повернулась на $6°+x°$, а секундная — на

$$360°+6°+x°=366°+x°.$$

Имеем уравнение (см. Предложение 2):

$$366+x=60(6+x),$$

откуда

$$x=\frac{6}{59} \text{ и } 6°+x°=6°+\left(\frac{6}{59}\right)°=\left(\frac{360}{59}\right)°.$$

Значит, при повороте минутной стрелки на $\left(\frac{360}{59}\right)°$ происходит первое совпадение минутной и секундной стрелок.

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, мин	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Минутная	6	1	Пропорциональная
Секундная	$\frac{360}{59}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{6}{\frac{360}{59}}=\frac{1}{t},$$

откуда

$$t=\frac{60}{59} \text{ (мин), или } \frac{1}{59} \text{ ч.}$$

Значит, впервые после полудня минутная и секундная стрелки совпадут через $\frac{1}{59}$ часа.

в) Если секундная стрелка поворачивается на 360°, то часовая стрелка поворачивается на

$$360°:720=0{,}5°$$

(*см. предложение 4*). Допустим, что после поворота на 0,5° часовая стрелка до совпадения с секундной повернётся ещё на $x°$, то есть всего — на $0{,}5°+x°$. Тогда секундная стрелка до совпадения с часовой повернётся на

$$360°+0{,}5°+x°=360{,}5°+x°.$$

Имеем уравнение (см. предложение 4):

$$360{,}5+x=720(0{,}5+x),$$

откуда

$$x=\frac{1}{1438} \text{ и } 0{,}5°+\left(\frac{1}{1438}\right)°=\left(\frac{360}{719}\right)°.$$

Составим таблицу.

Стрелки часов	Число градусов поворота	Соответствующее время, ч	Зависимость между числом градусов и соответствующим временем
Часовая	30	1	Пропорциональная
Секундная	$\frac{360}{719}$	t	

Имеем пропорцию:

$$\frac{30}{\frac{360}{719}}=\frac{1}{t},$$

откуда

$$t=\frac{12}{719}.$$

Значит, впервые после полудня часовая и секундная стрелка совпадут через $\frac{12}{719}$ часа.

2. В сутках 24 часа. Воспользовавшись результатами 1 а), б), в), получим:

а) $24:1\frac{1}{11}=22$, то есть минутная и часовая стрелки за сутки совпадут 22 раза.

б) $24:\frac{1}{59}=1416$, то есть секундная и минутная стрелки за сутки совпадут 1416 раз.

в) $24:\frac{12}{719}=1438$, то есть секундная и часовая стрелки за сутки совпадут 1438 раз.

г) Из решений 2 а), б) следует, что минутная и часовая стрелки за 12 часов совпадут

$$22:2=11 \text{ раз},$$

а секундная и минутная стрелки —

$$1416:2=708 \text{ раз.}$$

Допустим, что до первого совпадения всех трёх стрелок минутная и часовая стрелки совпадают x раз, а секундная и минутная стрелки — y раз, где

$$0<x\le 11 \text{ и } 0<y\le 708,\ x\in\mathbb{N},\ y\in\mathbb{N}.$$

Тогда, учитывая 1 а), б), получим уравнение:

$$1\frac{1}{11}x=\frac{1}{59}y,$$

откуда

$$y=\frac{708}{11}x.$$

Поскольку числа 708 и 11 взаимно простые, то y — целое при $x=11$, то есть $y=708$. Тогда имеем:

$$1\frac{1}{11}\cdot 11=\frac{1}{59}\cdot 708=12.$$

Таким образом, 11-е совпадение минутной и часовой стрелок и 708-е совпадение секундной и минутной стрелок произойдёт через 12 часов. Следовательно, через 12 часов произойдёт первое совпадение всех трёх стрелок. А за сутки (за 24 часа) произойдёт два их совпадения.

3. а) Если часовая стрелка поворачивается на 30°, то минутная стрелка поворачивается на 360°; угол между стрелками —

$$360°-30°=330°.$$

Составим пропорцию:

$$30° — 330°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{30}{x}=\frac{330}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{11}.$$

Значит, при повороте часовой стрелки на $\left(\frac{90}{11}\right)^{\circ}$ угол между минутной и часовой стрелками составит 90°.

За сутки часовая стрелка поворачивается на 720°. Тогда получим:

$$720:\frac{90}{11}=88,$$

то есть имеем 88 углов, половина из которых — прямые. Таким образом, за сутки минутная и часовая стрелки образуют прямой угол 44 раза.

б) Если минутная стрелка поворачивается на 6° (одно деление), то секундная стрелка поворачивается на 360° (60 делений); угол между стрелками —

$$360°-6°=354°.$$

Составим пропорцию.

$$6° — 354°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{6}{x}=\frac{354}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{59}.$$

Значит, при повороте минутной стрелки на $\left(\frac{90}{59}\right)^{\circ}$ угол между секундной и минутной стрелками составит 90°. За сутки минутная стрелка поворачивается на $24\cdot 360°$. Отсюда имеем:

$$24\cdot 360°:\frac{90}{59}=5664.$$

Половина из 5664 углов — прямые, то есть имеем $5664:2=2832$ прямых угла.

в) Если часовая стрелка поворачивается на 0,5°, то секундная стрелка поворачивается на 360° (см. предложение 4); угол между стрелками — $360°-0{,}5°=359{,}5°$.

Составим пропорцию.

$$0{,}5° — 359{,}5°$$

$$x° — 90°$$

$$\frac{0{,}5}{x}=\frac{359{,}5}{90},$$

откуда

$$x=\frac{90}{719}.$$

Значит, при повороте часовой стрелки на $\left(\frac{90}{719}\right)^{\circ}$ угол между секундной и часовой стрелками составит 90°. За сутки часовая стрелка поворачивается на 720°. Отсюда

$$720°:\frac{90}{719}=5752.$$

Половина из 5752 углов — прямые, то есть имеем $5752:2=2876$ прямых углов.

Ответы

1. а) Через $1\frac{1}{11}$ часа; б) через $\frac{1}{59}$ часа; в) через $\frac{12}{719}$ часа.
2. а) 22 раза; б) 1416 раз; в) 1438 раз; г) 2 раза.
3. а) 44 раза; б) 2832 раза; в) 2876 раз.

Литература

1.Рапацевич Е.С Золотая книга педагога/Е. С. Рапацевич; под общ. ред. А. П. Астахова.-Минск: Современная школа, 2010.-720с.

2.ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/под ред. И. В. Ященко.-М.: Издательство: «Национальное образование», 2016.-256с. –(ЕГЭ.ФИПИ-школе).

3.Сефибеков С.Р. 75 задач для развития математического мышления учащихся// Математика. Все для учителя!-2018.-№5-6.- с.25-45

4.Сефибеков С.Р. Математика на циферблате правильно идущих часов//Математика. Все для учителя!-2015.-№10.-С. 33-35.