Методическая разработка

для учителя

Сефибеков Сефибек Рамазанович

В МИРЕ ГЕОМЕТРИИ

(современные образовательные технологии- Элективный курс для учащихся 9-11 классов)

От автора

Здесь рассматриваем два вопроса: «Ищем Героновы треугольники» и « Доказываем формулу Пика». Оба вопроса излагаю популярно, доступно простым математическим языком. Я привожу авторское доказательство формулы Пика , т.е. заново её открываю. Приведенное доказательство представляет интерес для творчески работающего учителя, так как творчество - это поиск нового.

ЕГЭ содержит задания на вычисление площади многоугольника с вершинами в узлах квадратной сетки. В связи с этим, учащихся 9-11 классов на элективных занятиях можно ознакомить с приведенным доказательством формулы Пика и применением её для вычисления площадей в заданиях ЕГЭ. Формула Пика быстро приводит к цели.

ИЩЕМ ГЕРОНОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Чтобы получить новое, необходимо повторить старое.

С. Р. Сефибеков

Формула Герона, выражающая площадь S треугольника через его стороны a, b и c:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

изучается в курсе геометрии основной школы и хорошо известна учащимся. В данной статье мы уделим внимание героновым треугольникам.

Герона треугольник — треугольник, длины сторон и площадь которого выражаются целыми числами. Назван по имени греческого математика Герона Александрийского (ок. I в. н. э.), рассмотревшего треугольники со сторонами 13, 14, 15 и 5, 12, 13, площади которых соответственно равны 84 и 30 [1, с. 954].

Естественно, возникает вопрос: «Как можно получить указанные треугольники и сколько таких треугольников существует?»

При освещении данного вопроса нам понадобятся:

1. Формула Герона

Перепишем формулу Герона в следующем виде:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}.$$

Поскольку

$$\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{-a+b+c}{2},$$

$$\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+b+c-2b}{2}=\frac{a-b+c}{2},$$

$$\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b+c-2c}{2}=\frac{a+b-c}{2},$$

то

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}},$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \quad (1)$$

2. Пифагоровы числа

Рассмотрим уравнение $x^2+y^2=z^2$. Его целые положительные решения:

$$x=m^2-n^2, \quad (2)$$

$$y=2mn, \quad (3)$$

$$z=m^2+n^2, \quad (4)$$

где m и n — целые взаимно простые числа и $m>n$ ($m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$), наибольший общий делитель m и n НОД$(m;n)=1$.

Целые положительные решения уравнения представляют длины катетов x, y и гипотенузы z прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон и называют пифагоровыми числами.

ПОИСК ГЕРОНОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим случаи равностороннего, равнобедренного и разностороннего треугольников.

Случай 1. Треугольники равносторонние:

$$a=b=c.$$

По формуле (1) имеем:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{3a\cdot a\cdot a\cdot a}, \text{ или } S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

— число иррациональное при $a\in\mathbb{N}$. Значит, среди равносторонних треугольников героновых треугольников нет.

Случай 2. Треугольники равнобедренные. Пусть $b=c$, тогда по формуле (1) имеем:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2b+a)(2b-a)\cdot a\cdot a},$$

или

$$S=\frac{1}{4}a\sqrt{(2b)^2-a^2}. \quad (5)$$

Поскольку S — целое, то выражение $(2b)^2-a^2$ должно быть точным квадратом и произведение $a\sqrt{(2b)^2-a^2}$ должно быть кратно 4.

Проведём рассуждения, воспользовавшись формулами (2) – (4). Здесь возможны два варианта.

Вариант 1. Положим $2b=m^2+n^2$, $a=2mn$. Тогда, воспользовавшись формулой (5), получим:

$$S=\frac{1}{2}mn\left(m^2-n^2\right).$$

Следовательно, имеем треугольники со сторонами

$$a=2mn,\ b=c=\frac{m^2+n^2}{2}$$

и площадью

$$S=\frac{1}{2}mn\left(m^2-n^2\right),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n — нечётные, $m > n$ и НОД$(m;n)=1$.

Например, если $m=3$, $n=1$, то имеем треугольник со сторонами

$$a=2\cdot3\cdot1=6,\ b=c=\frac{3^2+1^2}{2}=5$$

и площадью

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\left(3^2-1^2\right)=12.$$

Вариант 2. Положим

$$2b=m^2+n^2,\ a=m^2-n^2.$$

Тогда имеем:

$$a=m^2-n^2,\ b=c=\frac{m^2+n^2}{2},\ S=\frac{1}{2}mn\left(m^2-n^2\right),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n — нечётные,

$$m>n \text{ и НОД}(m;n)=1.$$

Например, если $m=3$, $n=1$, то

$$a=8,\ b=c=5 \text{ и } S=12.$$

Таким образом, доказали, что равнобедренных героновых треугольников существует бесконечное множество.

Приведём ещё один способ рассуждений. Запишем формулу (5) в виде:

$$S=\frac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2}. \qquad (6)$$

$4b^2$ — чётное. Допустим, что $4b^2-a^2$ является точным квадратом. Если $4b^2-a^2$ — нечётный точный квадрат при нечётном a, то произведение $a\sqrt{4b^2-a^2}$ нечётно и не кратно 4, то есть S — не целое. Отсюда выражение $4b^2-a^2$ должно быть квадратом чётного числа, поэтому a — чётное.

Положим $a=2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$4b^2-a^2=4b^2-(2k)^2=4b^2-4k^2=4\left(b^2-k^2\right)$$

и формула (6) принимает вид:

$$S=\frac{1}{4}(2k)\sqrt{4\left(b^2-k^2\right)}, \text{ или } S=k\sqrt{b^2-k^2}. \qquad (7)$$

Теперь используем формулы (2) – (4). По формуле (7) выражение b^2-k^2 должно быть точным квадратом. Поэтому имеем два варианта.

Вариант 1. Положим

$$b^2-k^2=t^2,$$

где $b=z$, $k=y$ и $t=x$, то есть

$$b=m^2+n^2,\ k=2mn,\ t=m^2-n^2.$$

Тогда формула (7) принимает вид:

$$S=2mn\left(m^2-n^2\right).$$

Следовательно, имеем треугольники со сторонами

$$a=2k=2\cdot2mn=4mn,\ b=c=m^2+n^2$$

и площадью

$$S=2mn\left(m^2-n^2\right),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m>n$ и НОД$(m;n)=1$.

Полученные формулы дают бесконечное множество равнобедренных героновых треугольников. Воспользовавшись этими формулами, составим *таблицу 1* для частных случаев героновых треугольников.

Таблица 1

m	2	3	4	5	...
n	1	2	3	4	...
$a=4mn$	8	24	48	80	...
$b=c=m^2+n^2$	5	13	25	41	...
$S=2mn\left(m^2-n^2\right)$	12	60	168	360	...

Вариант 2. Положим

$$b^2-k^2=t^2,$$

где $b=m^2+n^2$, $k=m^2-n^2$, $t=2mn$. Тогда формула (7) принимает вид:

$$S=2mn\left(m^2-n^2\right).$$

Следовательно, имеем треугольники со сторонами

$$a=2k=2\left(m^2-n^2\right),\ b=c=m^2+n^2$$

и площадью

$$S=2mn\left(m^2-n^2\right),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m>n$ и НОД$(m;n)=1$.

Полученные формулы дают бесконечное множество равнобедренных героновых треугольников. Воспользовавшись этими формулами, составим *таблицу 2* для частных случаев.

Таблица 2

m	2	3	4	5	...
n	1	2	3	4	...
$a=2\left(m^2-n^2\right)$	6	10	14	18	...
$b=c=m^2+n^2$	5	13	25	41	...
$S=2mn\left(m^2-n^2\right)$	12	60	168	360	...

Случай 3. Треугольники разносторонние. Пусть $a<b<c$. Условие существования треугольника:

$$\begin{cases} a+b>c, \\ b+c>a, \\ c+a>b. \end{cases}$$

Рассмотрим найденные Героном треугольники с разными сторонами 5, 12, 13 и 13, 14, 15 (которые мы упоминали в начале статьи).

Числа 5, 12, 13 можно получить с помощью формул (2) – (4) при $n=2$ и $m=3$. Треугольник со сторонами $a=5$, $b=12$, $c=13$ является прямоугольным ($5^2+12^2=13^2$). Из него можно получить бесконечное множество героновых прямоугольных треугольников со сторонами $a=5t$, $b=12t$, $c=13t$ и площадью $S=30t^2$, где $t\in\mathbb{N}$.

Числа 13, 14, 15 образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Поставим следующую задачу.

Задача. Найти героновы треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию с разностью 1.

Решение

Пусть стороны треугольника

$$a=x-1,\ b=x,\ c=x+1.$$

Тогда равенство (1) принимает вид:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{3x\cdot x\cdot(x-2)(x+2)},$$

$$S=\frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}=n\sqrt{3\left(n^2-1\right)},$$

где $n=\frac{x}{2}$.

Чтобы S было целым, должно быть $x=2n$ — чётным и

$$n^2-1=3t^2,\quad n^2-3t^2=1,$$

$$\left(n-t\sqrt{3}\right)\left(n+t\sqrt{3}\right)=1. \qquad (8)$$

Равенство (8) выполняется при $n=2$ и $t=1$:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1,$$

следовательно,

$$\left(\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^p=1^p,\quad \left(2-\sqrt{3}\right)^p\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^p=1, \qquad (9)$$

где $p\in\mathbb{N}$.

Из соотношений (8) и (9) имеем:

$$n_p+t_p\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^p,\quad n_p-t_p\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^p.$$

Таким образом,

$$x_p=2n_p=\left(2+\sqrt{3}\right)^p+\left(2-\sqrt{3}\right)^p,$$

где $p\in\mathbb{N}$.

Значит, имеем бесконечное множество решений:

$$a_p=x_p-1, \qquad (10)$$

$$b_p=x_p, \qquad (11)$$

$$c_p=x_p+1, \qquad (12)$$

$$S_{n_p}=n_p\sqrt{3\left(n_p^2-1\right)}, \qquad (13)$$

где

$$n_p=\frac{x_p}{2}, \qquad (14)$$

$$x_p=\left(2+\sqrt{3}\right)^p+\left(2-\sqrt{3}\right)^p, \qquad (15)$$

где $p\in\mathbb{N}$.

По полученным формулам (10) – (15) имеем:

при $p=1$

$$x_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^1+\left(2-\sqrt{3}\right)^1=4,\quad a_1=x_1-1=4-1=3,$$

$$b_1=x_1=4,\quad c_1=x_1+1=4+1=5 \text{ и } n_1=\frac{x_1}{2}=\frac{4}{2}=2,$$

$$S_{n_1}=n_1\sqrt{3\left(n_1^2-1\right)}=2\sqrt{3\left(2^2-1\right)}=6,$$

то есть получили прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 и площадью 6;

при $p=2$

$$x_2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2=14,$$

$$a_2=x_2-1=14-1=13,\quad b_2=x_2=14,$$

$$c_2=x_2+1=14+1=15 \text{ и } n_2=\frac{x_2}{2}=\frac{14}{2}=7,$$

$$S_{n_2}=n_2\sqrt{3\left(n_2^2-1\right)}=7\sqrt{3\left(7^2-1\right)}=84,$$

то есть получили треугольник со сторонами 13, 14, 15 и площадью 84.

Примечание. Из каждого полученного частного решения можно получить бесконечное множество решений, например,

$$(3;4;5)\to(3t;4t;5t),\quad (13;14;15)\to(13t;14t;15t),$$

где $t\in\mathbb{N}$.

Наконец выясним, существуют ли героновы непрямоугольные треугольники, стороны которых не образуют арифметическую прогрессию.

Подкоренное выражение в формуле (1) равно

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$

$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

(убедитесь в этом!), то есть не является квадратом целого числа при $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{N}$. (Заметим, что полный квадрат

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+a^4+b^4+c^4.)$$

Поэтому S — не целое! Следовательно, искомых героновых треугольников не существует.

ДОКАЗЫВАЕМ ФОРМУЛУ ПИКА

Георг Пик (1859-1942)

■ Введем понятие «целочисленная решетка».

Плоскость можно покрыть сеткой равных квадратов. Узлы этой сетки (вершины квадратов) в математике называют *целочисленной решеткой*.

Примером такой решетки служит лист клетчатой бумаги из школьной тетради. Такой лист будем просто называть *квадратной сеткой*.

Далее речь пойдет о вычислении площади многоугольника в узлах квадратной сетки. За единицу длины примем сторону клетки, за единицу площади — саму клетку.

Задача Пика. Площадь многоугольника с вершинами в узлах квадратной сетки равна

$$S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1, \qquad (*)$$

где S — площадь многоугольника, выраженная в площадях единичных квадратов сетки; Г — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника; В — количество узлов сетки, расположенных внутри многоугольника.

Формула (*) носит имя немецкого математика Пика, открывшего ее. Приведу свое доказательство и тем самым открою искомую формулу заново.

Докажем формулу (*), рассматривая несколько задач.

Задача основная. Выясните, сколько узлов содержит отрезок длины a с концами в узлах сетки.

Решение. Возможны четыре случая, изображенные на рисунках 1. Если отрезок a лежит на линии квадратной сетки (рис. 1,*а*), то он содержит $(a + 1)$ узел: $a = 9$ и узлов $a + 1 = 10$.

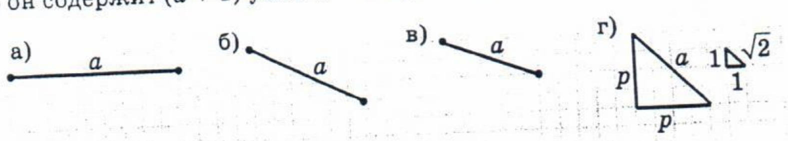

Рис. 1

Если отрезок a не лежит на линии квадратной сетки и не является осью симметрии клеток, то он может содержать внутренние узлы (рис. 1,*б*) и может не содержать внутренние узлы (рис. 1,*в*).

Если отрезок a является осью симметрии клеток (рис. 1,*г*), то, достроив его до прямоугольного треугольника с катетами, равными p, имеем:

$$a^2 = p^2 + p^2 = 2p^2, \; S = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Отсюда отрезок a содержит $(p + 1)$ узел. На нашем рисунке $a = 4\sqrt{2}$, и узлов $4 + 1 = 5$.

Упражнение 1. Докажите формулу (*) для прямоугольника со сторонами, направленными вдоль линий сетки.

Решение. Пусть дан прямоугольник со сторонами a и b (рис. 2).

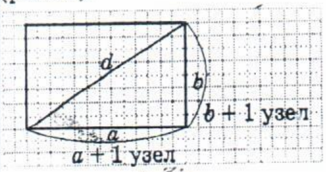

Рис. 2

Сторона a содержит $(a + 1)$ узел, сторона b содержит $(b + 1)$ узел, тогда прямоугольник содержит узлов

$$(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1,$$

$$\Gamma = 2(a + 1) + 2(b + 1) - 4 = 2(a + b)$$

(так как четыре узла в вершинах прямоугольника к границе включили дважды, то нужно вычесть число 4),

$$\text{В} = (ab + a + b + 1) - 2(a + b) = ab - a - b + 1,$$

$$S = (ab - a - b + 1) + \frac{2(a+b)}{2} - 1 = ab,$$

Упражнение 2. Докажите формулу (*) для прямоугольного треугольника, катеты которого не равны и направлены вдоль линий сетки.

Решение. Проведя в прямоугольнике (см. рис. 2) диагональ d, получим треугольник с катетами a и b ($a \neq b$). Пусть диагональ d содержит внутри p узлов: $p = 0$ либо $p \geq 1$ (см. основную задачу). Отсюда:

$$\Gamma = (a + 1) + b + p = a + b + p + 1;$$

$$\text{В} = \frac{ab - a - b + 1 - p}{2}$$

(см. упражнение 1);

$$S = \frac{ab - a - b + 1 - p}{2} + \frac{a + b + p + 1}{2} - 1 = \frac{ab}{2}, .$$

Упражнение 3. Докажите формулу (*) для квадрата, стороны которого направлены вдоль линий сетки.

Решение. Предположим, что $a = b$. Тогда (см. упражнение 1):

$$\Gamma = 4a,\ \text{В} = a^2 - 2a + 1,\ S = \left(a^2 - 2a + 1\right) + \frac{4a}{2} - 1 = a^2.$$

Упражнение 4. Докажите формулу (*) для прямоугольного треугольника, катеты которого равны и направлены вдоль линий сетки.

Решение. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами, равными a, и гипотенузой d (рис. 3).

Достроим его до квадрата. Так как внутри диагонали d содержится $(a - 1)$ узел (см. основную задачу), то:

$$\Gamma = (a + 1) + a + (a - 1) = 3a,$$

$$\text{В} = \frac{\left(a^2 - 2a + 1\right) - (a - 1)}{2} = \frac{a^2 - 3a + 2}{2}$$

(см. упражнение 2);

$$S = \frac{a^2 - 3a + 2}{2} + \frac{3a}{2} - 1 = \frac{a^2}{2}, .$$

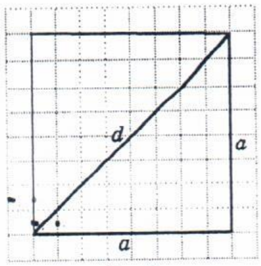

Рис. 3

Упражнение 5. Используя упражнения 1–4, докажите, что формула (*) верна для треугольника, у которого не более одной стороны направлено вдоль линий сетки.

Решение. Возьмем треугольник $A_1A_2A_3$ и опишем около него прямоугольник. Тогда возможны ситуации, изображенные на рисунках далее.

Пусть Π, Π_1, Δ_1, Δ_2, Δ_3 — соответственно площади описанного прямоугольника, малого прямоугольника и прямоугольных треугольников, дополняющих данный треугольник до описанного прямоугольника; В_Π, В_{Π_1}, В_1, В_2, В_3 — соответственно число их внутренних узлов; Γ_Π, Γ_{Π_1}, Γ_1, Γ_2, Γ_3 — соответственно число узлов на границе; q_1, q_2, q_3 — соответственно число внутренних узлов сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; r_1, r_2 — число внутренних узлов на смежных сторонах малого прямоугольника.

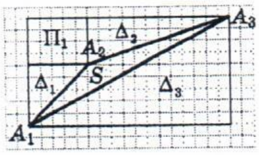

Рис.4

Тогда (рис. 4):

$$S = \Pi - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Pi_1), \qquad (1)$$

по формуле (*):

$$\Pi = \text{В}_\Pi + \frac{\Gamma_\Pi}{2} - 1, \qquad (2)$$

$$\Pi_1 = \text{В}_{\Pi_1} + \frac{\Gamma_{\Pi_1}}{2} - 1, \qquad (3)$$

$$\Delta_1 = \text{В}_1 + \frac{\Gamma_1}{2} - 1, \qquad (4)$$

$$\Delta_2 = \text{В}_2 + \frac{\Gamma_2}{2} - 1, \qquad (5)$$

$$\Delta_3 = \text{В}_3 + \frac{\Gamma_3}{2} - 1. \qquad (6)$$

Из равенств (1)–(6) получим:

$$S = \text{В}_{\text{П}} - (\text{В}_{\text{П}_1} + \text{В}_1 + \text{В}_2 + \text{В}_3) + \frac{\Gamma_{\text{П}} - (\Gamma_{\text{П}_1} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)}{2} + 3. \qquad (7)$$

Так как

$$\text{В}_{\text{П}} - (\text{В}_{\text{П}_1} + \text{В}_1 + \text{В}_2 + \text{В}_3) = \text{В} + (q_1 + q_2 + q_3) + (r_1 + r_2) + 1$$

(число 1 означает узел в точке A_2) и

$$\Gamma_{\text{П}_1} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma_{\text{П}} + (2r_1 + 2r_2 + 4) + (q_1 + q_2 + q_3 + 3)$$

(число 4 означает узлы в вершинах малого прямоугольника, число 3 — узлы в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$). Тогда

$$S = \text{В} + (q_1 + q_2 + q_3) + (r_1 + r_2) + 1 + \frac{\Gamma_{\text{П}} - (\Gamma_{\text{П}} + (2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 4) + (q_1 + q_2 + q_3 + 3))}{2} + 3, \qquad (8)$$

или

$$S = \text{В} + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 5}{2} + 3 = \text{В} + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 8}{2} + 3 = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1,$$

где

$$\Gamma = q_1 + q_2 + q_3 + 3.$$

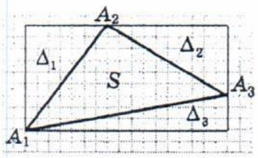

Рис. 5

Из рисунка 5 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = \text{В} + q_1 + q_2 + q_3 + \frac{\Gamma_{\text{П}} - (\Gamma_{\text{П}} + q_1 + q_2 + q_3 + 3)}{2} + 2$$

(число 3 в числителе дроби означает число узлов в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$), откуда

$$S = \text{В} + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 3}{2} + 2 = \text{В} + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 6}{2} + 2 = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

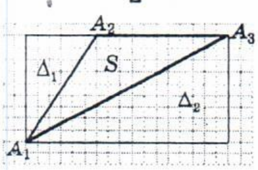

Рис. 6

Из рисунка 6 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = \text{В} + q_1 + q_3 + \frac{\Gamma_{\text{П}} - (\Gamma_{\text{П}} + q_1 + q_3 - q_2 + 1)}{2} + 1$$

(число 1 в числителе дроби означает, что узел в вершине A_1 включается дважды), откуда

$$S = \text{В} + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 1}{2} + 1 = \text{В} + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 4}{2} + 1 = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

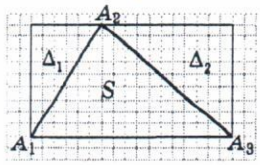

Рис. 7

Из рисунка 7 видно, что аналогом равенства (8) будет равенство

$$S = \text{В} + q_1 + q_2 + \frac{\Gamma_{\text{П}} - (\Gamma_{\text{П}} - q_3 + q_1 + q_2 + 1)}{2} + 1$$

(число 1 в числителе дроби означает, что узел в вершине A_2 включается дважды), откуда

$$S = \text{В} + \frac{q_1 + q_2 + q_3 - 1}{2} + 1 = \text{В} + \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + 3) - 4}{2} + 1 = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Упражнение 6. Докажите формулу (*) для произвольного многоугольника.

Решение. Пусть дан произвольный N-угольник $A_1A_2...A_N$ с вершинами в узлах квадратной сетки (неважно, выпуклый он или невыпуклый). Воспользуемся методом математической индукции. Для треугольника $A_1A_2A_3$ (при $n = 3$) формула доказана (см. упражнения 2, 4 и 5).

Допустим, что формула (*) верна для всех $n < N$ $(n \geq 4)$. Разобьем N-угольник диагональю A_KA_N на два многоугольника: $A_1A_2...A_KA_N$ и $A_NA_K...A_{N-1}$. Обозначим соответственно через S_1 и S_2 площади этих многоугольников, через В_1 и В_2 — число их внутренних узлов, через Γ_1 и Γ_2 — число узлов на границе и через p $(p \geq 0)$ — число внутренних узлов диагонали A_KA_N.

Тогда

$$S_1 = \text{В}_1 + \frac{\Gamma_1}{2} - 1, \quad S_2 = \text{В}_2 + \frac{\Gamma_2}{2} - 1.$$

Отсюда

$$\text{В} = \text{В}_1 + \text{В}_2 + p, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2p - 2$$

(так как узлы диагонали A_KA_N дважды включаются к границам Γ_1 и Γ_2) и

$$S = S_1 + S_2 = \text{В}_1 + \text{В}_2 + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - 2 = (\text{В} - p) + \frac{\Gamma + 2p + 2}{2} - 2 = \text{В} + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Таким образом, условия метода математической индукции выполнены и формула (*) верна для любого N-угольника.

Формула Пика доказана.

Пример. Вычислите площадь многоугольника, изображенного на рисунке 8.

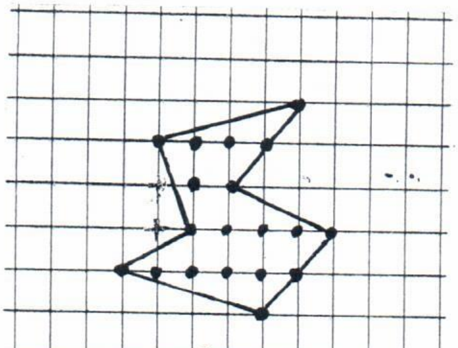

Рис. 8

Решение. В = 10, Г = 9, по формуле (*) имеем:

$$S = 10 + \frac{9}{2} - 1 = 13{,}5.$$

Ответ: 13,5 кв. ед.

Литература

1.Математическая энциклопедия/под.ред.И.М.Виноградова.Т.1.-М:Советская энциклопедия,1977.

2.Геометрия .7-9 классы:учеб.для общеобразоват.организаций/ [Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов,С.Б. Кадомцеви др].- 2-е изд-М.: Просвещение,2014.-383 с.: ил

3.Сефибеков С.Р. Ищем Героновы треугольники//Математика . Всё для учителя !-2015.- №12.-С.6-8.

4. Сефибеков С.Р. Доказываем формулу Пика // Математика.-2020.№8.-С.12-14,22