Сефибеков Сефибек Рамазанович

ПЛОЩАДЬ В КООРДИНАТАХ

(Современные образовательные технологии-элективный курс для учащихся 10-11классов).

СОДЕРЖАНИЕ

Координатный метод
во многих случаях облегчает
решения геометрических задач
С. Р. Сефибеков.

ВВЕДЕНИЕ

Метод координат, предложений в XVII в. Французскими математиками Рене Декартом (1596-1650) и Пьером Ферма (1601-1665), является мощным аппаратом, позволяющим переводить геометрические понятия на алгебраический язык. В основе этого метода лежит понятие *с и с т е м а к о о р д и н а т*. Таких систем много – сферическая ,полярная, прямоугольная (декартова) и другие.

Учащиеся знакомятся с прямоугольной системой координат в 6 классе. Здесь мы рассмотрим вопросы, связанные с вычислением площади многоугольника по координатам его вершин в этой системе координат.

Данный материал учителя математики могут использовать при проведении элективов в 10-11 классах средней школы, а также при проведении кружковых и факультативных занятий с целью углубления и расширения знаний учащихся в области математики.

ПЛОЩАДЬ В КООРДИНАТАХ

Книга-книгой,

а мозгами двигай.

В.Маяковский

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если S_3 — площадь треугольника $A_1A_2A_3$, где $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, $A_3(x_3;y_3)$, то справедливо равенство:

$$S_3=\frac{1}{2}|F_3|, \qquad (*)$$

где

$$F_3=((x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)).$$

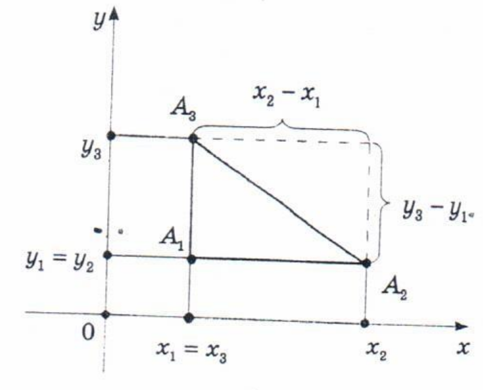
F_3 **будем называть определителем площади треугольника.**

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи.

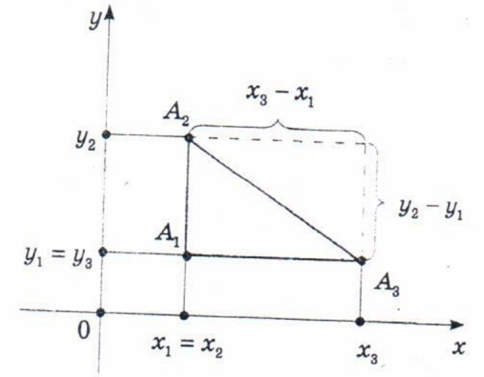
Случай 1. Треугольник $A_1A_2A_3$ прямоугольный с катетами A_1A_2 и A_1A_3, параллельными координатным осям (*рис. 1*). На рис. 1 а) направление $A_1\to A_2\to A_3\to A_1$ обхода вершин треугольника $A_1A_2A_3$ противоположно направлению движения часовой стрелки. Это направление обхода будем считать положительным. На рис. 1 б) направление $A_1\to A_2\to A_3\to A_1$ обхода вершин совпадает с направлением часовой стрелки. Такое направление будем считать отрицательным.

По рис. 1 а) имеем:

$$S_3=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_3-y_1)=$$



а)



б)

Рис. 1

$$=\frac{1}{2}(x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3+x_1y_1)=$$

$$=\frac{1}{2}((x_2y_3+x_1y_1)-(x_2y_1+x_1y_3))=$$

$$=\frac{1}{2}((x_1y_2+x_2y_3)-(y_1x_2+y_3x_1))=$$

$$=\frac{1}{2}((x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)),$$

то есть

$$S_3=\frac{1}{2}F_3. \qquad (1)$$

В равенстве (1) $F_3>0$, так как

$$x_2-x_1>0 \text{ и } y_3-y_1>0.$$

По рис. 1 б) имеем:

$$S_3=\frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_2-y_1)=$$

$$=\frac{1}{2}((x_3y_2+x_1y_1)-(x_3y_1+x_1y_2))=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right)\right),$$

то есть

$$S_3=-\frac{1}{2}F_3. \qquad (2)$$

В равенстве (2) $F_3<0$, так как

$$-F_3=\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)>0.$$

Из равенств (1) и (2) следует:

$$S_3=\frac{1}{2}\left|F_3\right|.$$

Случай 2. Одна из сторон треугольника $A_1A_2A_3$ параллельна одной из осей координат (*рис. 2*; $A_2A_3 \parallel Oy$).

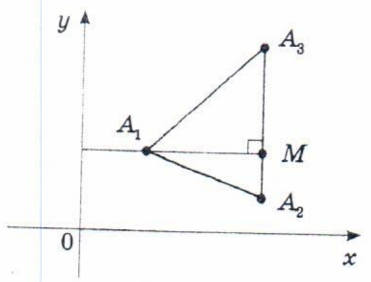


Рис. 2

Проведём $A_1M \perp A_2A_3$ и воспользуемся случаем 1.

$$S_3=S_{A_1MA_3}+S_{A_1A_2M}.$$

Обозначим координаты точки M через x и y. Тогда (направление обхода вершин треугольников A_1MA_3 и A_1A_2M — положительное):

$$S_{A_1MA_3}=\frac{1}{2}\left(\left(x_1y+xy_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x+yx_3+y_3x_1\right)\right),$$

$$S_{A_1A_2M}=\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y+xy_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x+yx_1\right)\right).$$

Отсюда, учитывая, что $x=x_2=x_3$, получим:

$$S_3=\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right)\right)$$

(убедитесь в этом!), или

$$S_3=\frac{1}{2}F_3,$$

то есть,

$$S_3=\frac{1}{2}\left|F_3\right|.$$

Случай 3. Общий (*рис. 3*). Проведём $A_3M \parallel Oy$ и воспользуемся случаем 2.

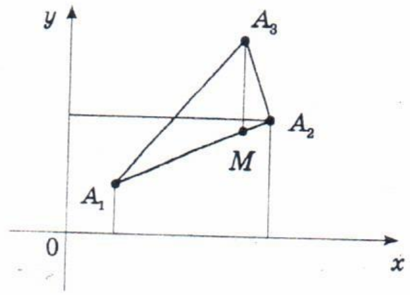


Рис. 3

Пусть x и y — координаты точки M, $x=x_3$.

$$S_3=S_{A_1A_3M}+S_{MA_3A_2}$$

(направление обхода вершин треугольников A_1A_3M и MA_3A_2 отрицательное);

$$S_{A_1A_3M}=-\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_3+x_3y+xy_1\right)-\left(y_1x_3+y_3x+yx_1\right)\right),$$

$$S_{MA_3A_2}=-\frac{1}{2}\left(\left(xy_3+x_3y_2+x_2y\right)-\left(y_1x_3+y_3x_2+y_2x\right)\right).$$

Из этих равенств имеем:

$$S_3=-\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right)\right),$$

то есть

$$S_3=-\frac{1}{2}F_3,\ \ S_3=\frac{1}{2}\left|F_3\right|.$$

Теорема 1 доказана.

ПЛОЩАДЬ n-УГОЛЬНИКА

Многоугольник может быть выпуклым или невыпуклым. И здесь порядок нумерации вершин считается отрицательным, если вершины нумеруются по направлению движения часовой стрелки, и положительным, если вершины нумеруются против движения часовой стрелки.

Многоугольник, не имеющий самопересечения сторон, будем называть простым. Для простого именно n-угольника справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если S_n — площадь простого n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, где $A_1\left(x_1;y_1\right)$, $A_2\left(x_2;y_2\right)$, ..., $A_n\left(x_n;y_n\right)$, то справедливо равенство

$$S_n=\frac{1}{2}\left|F_n\right|, \qquad (**)$$

где

$$F_n=\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_nx_1\right)\right).$$

F_n будем называть определителем площади простого n-угольника.

Доказательство. При $n=3$ (для треугольника) теорема 2 доказана (см. теорему 1). Докажем теорему для N-угольника $A_1A_2\ldots A_N$ (*рис. 4*).

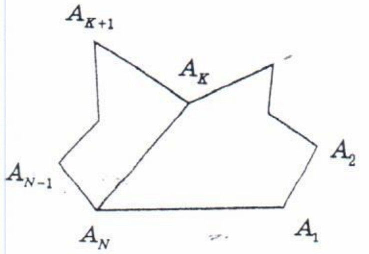


Рис. 4

Воспользуемся методом математической индукции. Пусть теорема верна и для всех $n<N$. Разобьём N-угольник диагональю A_KA_N на два многоугольника: $A_1A_2\ldots A_KA_N$ и $A_NA_K\ldots A_{N-1}$.

Тогда площадь S_N N-угольника равна

$$S_N = S_{A_1A_2\ldots A_KA_N} + S_{A_NA_K\ldots A_{N-1}},$$

или, учитывая, что вершины нумеруются в положительном направлении, имеем:

$$S_N =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_Ky_N+x_Ny_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_Kx_N+y_Nx_1\right)\right)+$$

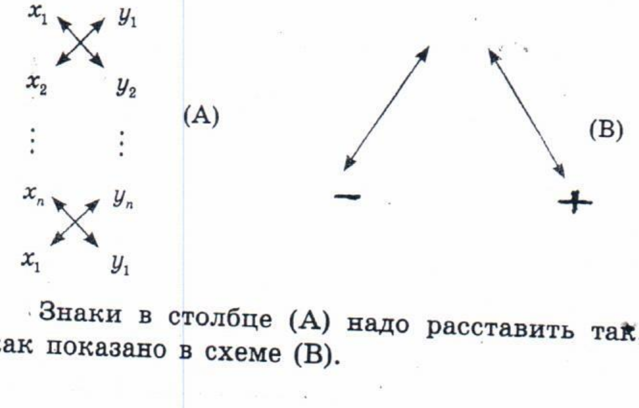
$$+\frac{1}{2}\left(\left(x_Ny_K+x_Ky_{K+1}+\ldots+x_{N-1}y_N\right)-\left(y_Nx_K+y_Kx_{K+1}+\ldots+y_{N-1}x_N\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_Ny_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_Nx_1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}F_N=\frac{1}{2}\left|F_N\right|.$$

Таким образом, формула (**) справедлива для N-угольника, и значит, условия математической индукции выполнены, то есть формула (**) для случая n-угольника доказана.

Замечание 1. **Выражение для F_n запоминается нелегко. Поэтому для вычисления его значения удобно выписать в столбец координаты первой, второй, третьей, ..., n-й и снова первой вершин n-угольника и выполнить умножение по схеме:**



Знаки в столбце (А) надо расставить так, как показано в схеме (В).

Замечание 2. При составлении столбца (А) для треугольника можно начать с любой вершины.

Замечание 3. При составлении столбца (А) для n-угольника ($n \geq 4$) необходимо соблюдать последовательность выписывания координат вершин n-угольника (с какой вершины начинать обход — значения не имеет). Поэтому вычисление площади n-угольника следует начинать с построения «грубого» чертежа.

Теперь рассмотрим несколько задач.

1. Определить площадь треугольника ABC, если $A(1;2)$, $B(-2;5)$, $C(4;-2)$.

Решение. Составим столбец:

Отсюда $F_3=\left(\left(-2+20-4\right)-\left(8+4+5\right)\right)=-3$.

По формуле (*) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|-3\right|=1{,}5$.

Ответ. 1,5 кв. ед.

2. Вычислить площадь пятиугольника, вершины которого имеют координаты

$(-1;2)$, $(1;1)$, $(2;3)$, $(3;-5)$ и $(-2;-4)$.

Решение. Выполним «грубый» чертёж (*рис. 5*).

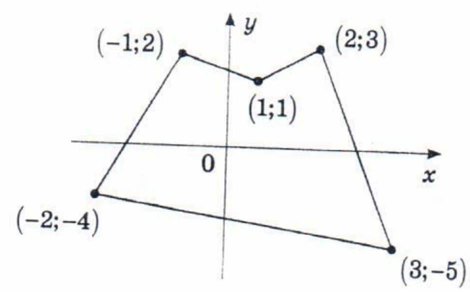


Рис. 5

Имеем:

Отсюда

$$F_3 = ((2+4+10+9+2)-(-1-4-12-10+3)) = 51.$$

Таким образом,

$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot|51| = 25,5.$$

Ответ. 25,5 кв. ед.

3. Даны точки $A(3;4)$ и $B(6;6)$. На оси Oy определить точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5.

Решение. Составим столбец, заметив, что $C(0;y)$:

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 0 & y \\ 6 & 6 \\ 3 & 4 \end{array}$$

Отсюда

$$F_3 = -3y + 6.$$

Так как $S_3 = 5$, то

$$\frac{1}{2}\cdot|-3y+6| = 5,$$

откуда

$$y_1 = -1\frac{1}{3},\ \ y_2 = 5\frac{1}{3}.$$

Следовательно, задача имеет два решения:

$$C_1\left(0;-1\frac{1}{3}\right),\ \ C_2\left(0;5\frac{1}{3}\right).$$

Ответ. $C_1\left(0;-1\frac{1}{3}\right)$, $C_2\left(0;5\frac{1}{3}\right)$.

4. **Найти условие, при котором точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_3)$ лежат на одной прямой.**

Решение. Если данные точки лежат на одной прямой, то треугольник ABC вырождается в отрезок. Тогда по теореме 1 $S_3 = 0$. Отсюда и $F_3 = 0$, то есть

$$(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = 0,$$

откуда

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1$$

— искомое условие.

5. Найти условие, при котором точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и начало координат лежат на одной прямой.

Решение. Полагая по задаче 4 $x_3 = 0$ и $y_3 = 0$, получим искомое условие: $x_1y_2 = y_1x_2$.

6. Известно, что прямая проходит через точки $\left(\frac{1}{3};2\right)$ и $(-3;-18)$. Проходит ли она через начало координат?

Указание. Воспользоваться результатом задачи 5.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.

Решение. Пусть $C(x;y)$ — точка искомой прямой. Тогда рассмотрим вырожденный в отрезок треугольник ABC (задача 4). Полагая $x_3 = x$ и $y_3 = y$, получим:

$$x_1y_2 + x_2y + xy_1 = y_1x_2 + y_2x + yx_1,$$

или

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

— искомое уравнение.

Если прямая не параллельна координатным осям, то есть если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то полученное равенство запишется так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это равенство называют **каноническим уравнением прямой.**

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

Сформулируем два определения.

Определение 1. Определителем второго порядка, составленного из четырёх чисел a_1, b_1, a_2 и b_2 (записывается $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$), называется разность $a_1b_2 - a_2b_1$.

То есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (*)$$

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 15 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим формулу (*), получим:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - 15\cdot(-3) = 10 + 45 = 55.$$

Определение 2. **Определителем третьего порядка, составленного из девяти чисел a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 (записывают**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}),$$

называется **алгебраическая сумма**

$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3$.

То есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \quad (**)$$

При вычислении определителей третьего по-дка обычно пользуются правилом треугольни-в или правилом Саррюса.

По правилу треугольников первые три сла-емых в правой части равенства (**) вычисля-г по *схеме 1*: они представляют собой произве-ния элементов, стоящих на главной диагонали в вершинах двух треугольников, у которых на из сторон параллельна главной диагонали. ои этом произведения берутся со знаком «+». стальные три слагаемых правой части равен-ва (**) вычисляют по *схеме 2*: они представ-ют собой произведения элементов, стоящих побочной диагонали и в вершинах треуголь-иков, у которых одна из сторон параллельна ібочной диагонали. При этом произведения, ічисленные по второй схеме, берутся со зна-м «−».

\+

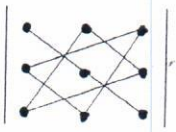


Схема 1

−

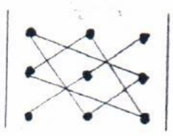


Схема 2

Пример 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

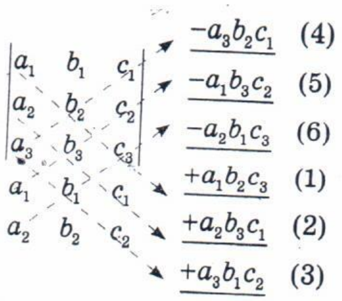
Решение. Воспользуемся правилом треуголь-ков. Имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{1\cdot(-1)\cdot(-2)+4\cdot(-7)\cdot3+2\cdot5\cdot6}_{\text{по схеме 1}} -$$

$$\underbrace{-6\cdot(-1)\cdot3-4\cdot2\cdot(-2)-(-7)\cdot5\cdot1}_{\text{по схеме 2}} =$$

$$= 2-84+60+18+16+35 = 47.$$

Чтобы запомнить правило Саррюса, мож-рекомендовать следующую его запись. Под ределителем вновь запишем его первую и вто-ю строки. Со знаком «+» следует брать про-ведения тех троек элементов, которые стоят на главной диагонали (a_1, b_2, c_3), и тех из троек элементов, которые расположены параллельно этой диагонали (a_2, b_3, c_1 и a_3, b_1, c_2). Со знаком «−» берут произведение элементов, стоящих на побочной диагонали (a_3, b_2, c_1), и тех из троек элементов, которые расположены параллельно этой диагонали (a_1, b_3, c_2 и a_2, b_1, c_3).



Произведения (1)–(6) вычисляются последовательно:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (6).$$

Пример 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{matrix}$$

$$= 3\cdot(-5)\cdot(-7)+7\cdot5\cdot1+6\cdot2\cdot4-6\cdot(-5)\cdot1-$$

$$-3\cdot5\cdot4-7\cdot2\cdot(-7) = 105+35+48+30-60+98 = 256.$$

Задача 1. Система уравнений

$$\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a \end{cases}$$

имеет единственное решение. Докажите, что $abc \neq 0$ и найдите решение.

Решение. Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} bx+ay+0\cdot z=c, \\ cx+0\cdot y+az=b, \\ 0\cdot x+cy+bz=a. \end{cases}$$

Так как система имеет единственное решение, то определитель этой системы Δ не равен нулю. Вычислим Δ.

$$\Delta=\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}=$$

$$=b\cdot 0\cdot b+c\cdot c\cdot 0+0\cdot a\cdot a-0\cdot 0\cdot 0-$$

$$-b\cdot c\cdot a-c\cdot a\cdot b=-2abc;$$

$$-2abc\neq 0,$$

откуда

$$abc\neq 0.$$

Требуемое доказано.

Определим один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z, например, Δ_x.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}=a^3-ac^2-ab^2=a\left(a^2-c^2-b^2\right);$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{a\left(a^2-c^2-b^2\right)}{-2abc},$$

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

Выполнив круговую перестановку

$$b\to c\to a\to b$$

в равенстве (1), получим:

$$y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \text{или}\ y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \qquad (2)$$

Выполнив ещё раз круговую перестановку

$$a\to b\to c\to a$$

в равенстве (2), получим:

$$z=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba},\ \text{или}\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \qquad (3)$$

Равенства (1) – (3) и представляют решение системы.

Ответ. $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right).$

Итак, сделаем некоторые выводы по рассмотренной нами теме. (Заметим, что приведённые ниже формулы кратки и легко запоминаются).

1. Для площади S_3 треугольника с вершинами $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$, имеем равенство:

$$S_3=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)\right|,$$

или

$$S_3=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

2. Для площади S_n n-угольника имеем:

$$S_n=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+\ldots+x_ny_1)-(y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_nx_1)\right|,$$

или

$$S_n=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right|+\left|\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}\right|+\ldots+\left|\begin{matrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right\|.$$

3. Условие принадлежности трёх точек $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ одной прямой:

$$(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$:

$$(x_1y_2+x_2y+xy_1)-(y_1x_2+y_2x+yx_1)=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Теперь рассмотрим ещё один вопрос, представляющий интерес: *определители и пучок прямых.*

Введём следующее определение.

Определение. Множество прямых называется пучком, если эти прямые имеют общую точку.

Пример 1. При каком условии три прямые

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0\ \text{и}\ a_3x+b_3y+c_3=0$$

образуют пучок?

Решение. Пусть точка $(x_0;y_0)$ принадлежит всем трём прямым. Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0, \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3=0. \end{cases}$$

Рассмотрим две подсистемы этой системы:

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3=0. \end{cases}$$

По условию пара $(x_0;y_0)$ — решение этих систем. Определим x_0 и y_0 из этих систем уравнений:

$$x_0 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad (1)$$

$$x_0 = \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_1b_3 - a_3b_1}, \qquad (2)$$

$$y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad (3)$$

$$y_0 = \frac{a_3c_1 - a_1c_3}{a_1b_3 - a_3b_1}. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), получим:

$$\left(a_1b_2c_3b_1 + b_1c_2a_3b_1 + c_1a_2b_3b_1\right) - \\ -\left(c_1b_2a_3b_1 + b_1a_2c_3b_1 + a_1c_2b_3b_1\right) = 0, \qquad (5)$$

а приравнивая правые части равенств (3) и (4), получим:

$$\left(a_1b_2c_3a_1 + b_1c_2a_3a_1 + c_1a_2b_3a_1\right) - \\ -\left(c_1b_2a_3a_1 + b_1a_2c_3a_1 + a_1c_2b_3a_1\right) = 0. \qquad (6)$$

Относительно параметров a_1 и b_1 возможны три случая.

Случай 1. $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$. Тогда, разделив обе части равенства (5) на b_1 (или равенства (6) на a_1), получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Случай 2. $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$. Тогда равенство (7) следует из равенства (5).

Случай 3. $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$. Тогда равенство (7) следует из равенства (6).

Таким образом, равенство (7) и выражает требуемое условие.

Пример 2. Проверить, образуют ли прямые

$$2x + 3y - 5 = 0,$$

$$7x - 4y - 3 = 0 \text{ и } 5x + 2y - 7 = 0$$

пучок.

Решение. Вычислим определитель (см. (7)):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & -4 & -3 \\ 5 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 56 - 70 - 45 - 100 + 12 + 147 = 0,$$

следовательно, данные прямые образуют пучок.

Применим понятие «пучок прямых» к решению систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y + z = 7, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + t_1 = 0, \\ 2x + y + t_2 = 0, \\ x + y + t_3 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где $t_1 = -z - 2$, $t_2 = z - 7$, $t_3 = z - 6$.

Будем считать в полученной системе уравнений (*) t_1, t_2 и t_3 параметрами, а сами уравнения — «уравнениями прямых».

Затребуем, чтобы уравнения системы (*) образовали пучок:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & t_1 \\ 2 & 1 & t_2 \\ 1 & 1 & t_3 \end{vmatrix} = t_3 + 2t_1 + 2t_2 - t_1 - t_2 - 4t_3 =$$

$$= t_1 + t_2 - 3t_3 = 0$$

или

$$(-z - 2) + (z - 7) - 3(z - 6) = 0,$$

$$-3z + 9 = 0,$$

откуда $z = 3$.

Подставив значение $z = 3$, например, во второе и третье уравнения данной системы, получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $y = 2$.

Ответ. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

КООРДИНАТНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПЛОЩАДИ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Докажем координатным методом теорему о площади ортогональной проекции многоугольника на плоскость (она равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции).

Возьмём на плоскости α n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Построим его проекцию $A_1'A_2'\ldots A_n'$ на плоскость α'. Пусть прямая a — линия пересечения плоскостей α и α', φ — угол между ними: $0° < \varphi < 90°$ (*рис. 6*).

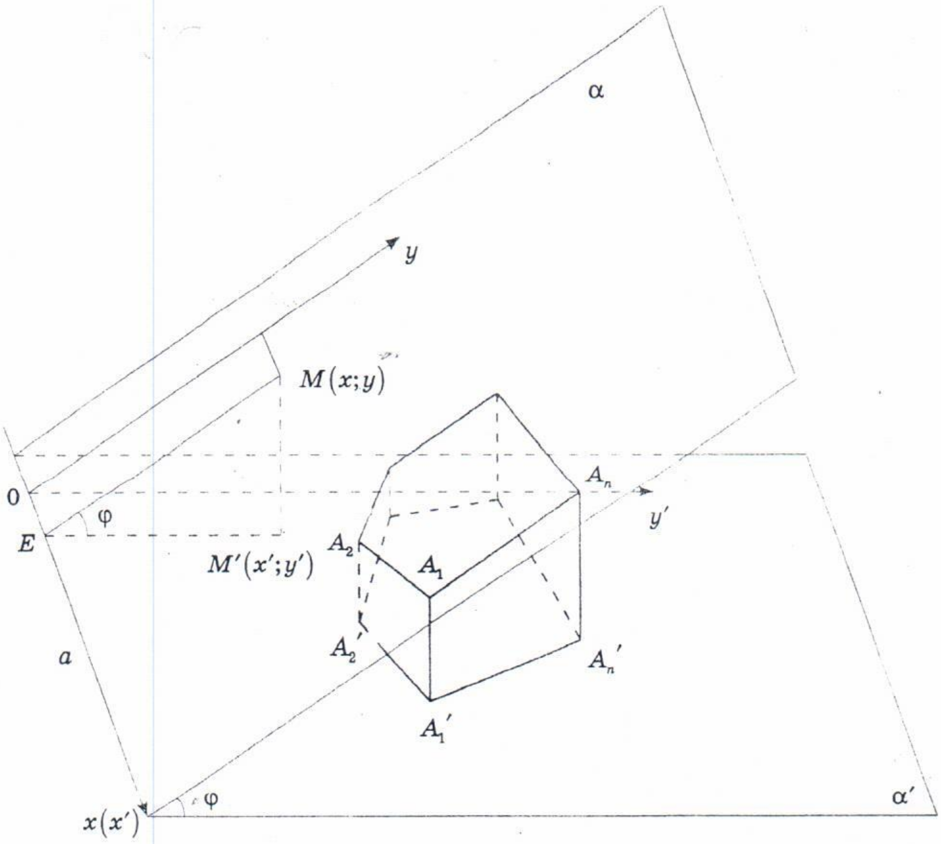


Рис. 6

Докажем, что

$$S_{A_1'A_2'\ldots A_n'} = S_{A_1A_2\ldots A_n} \cdot \cos\varphi.$$

На плоскости α выберем прямоугольную систему координат xOy, направив ось Ox вдоль прямой a. Построим ортогональные проекции x' и y' координатных осей Ox и Oy на плоскость α' (оси Ox и Ox' совпадут). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $Oy' \perp \alpha$; на плоскости α' получим прямоугольную систему координат $x'Oy'$.

Пусть вершины многоугольников имеют следующие координаты:

$$A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2),\ \ldots,\ A_n(x_n;y_n) \text{ и } A_1'\left(x_1';y_1'\right),$$

$$A_2'\left(x_2';y_2'\right),\ \ldots,\ A_n'\left(x_n';y_n'\right).$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Точка $M(x;y)$ плоскости α при ортогональном проектировании на плоскость α' перейдёт в точку $M'(x';y')$, где $x'=x$, $y'=y\cos\varphi$ (рис. 6).

Доказательство. Из треугольника EMM', где

$$ME \perp \alpha,\ MM' \perp \alpha',$$

следует (по теореме о трёх перпендикулярах):

$$M'E \perp \alpha \text{ и } \angle MEM' = \varphi.$$

Тогда

$$EM' = EM \cdot \cos\varphi.$$

Но

$$EM' = y' \text{ и } EM = y,$$

поэтому

$$y' = y\cos\varphi;\quad x' = OE = x.$$

Лемма доказана.

Таким образом, для координат вершин проекции по лемме можно утверждать:

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ \ldots,$$

$$x_n' = x_n \text{ и } y_1' = y_1\cos\varphi,$$

$$y_2' = y_2\cos\varphi,\ \ldots,$$

$$y_n' = y_n\cos\varphi.$$

Отсюда, согласно площади многоугольника по координатам его вершин, имеем:

$$S_{A_1'A_2'\ldots A_n'} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(x_1y_2\cos\varphi + x_2y_3\cos\varphi + \ldots + x_ny_n\cos\varphi\right) - \right.$$

$$\left. -\left(y_1\cos\varphi\cdot x_2 + y_2\cos\varphi\cdot x_3 + \ldots + y_n\cos\varphi\cdot x_1\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1\right) - \left(y_1x_2 + y_2x_3 + \ldots + y_nx_1\right)\right| \times$$

$$\times\cos\varphi = S_{A_1A_2\ldots A_n}\cdot\cos\varphi,$$

что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ

программа элективного курса «Площадь в координатах»

№	ТЕМА	Всего уроков
1	Площадь треугольника	1
2	Площадь n-угольника	3
3	Определители и геометрические выводы	4
4	Координатное доказательство теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника	1
5	Зачет	2
	ИТОГО	11

заключение

Мы рассмотрели вопрос «Площадь в координатах». Этот вопрос актуален тем, что рассмотрели задачи, связанные с прямой линией с другой точки зрения-с использованием понятия «*ПЛОЩАДЬ*» (см. *задачи 4-7 на с. 6*); геометрические выводы написали с помощью определителей; ввели понятие «*п у ч о к   п р я м ы х*» и применили это понятие к решению систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными; дали координатное доказательство теоремы об ортогональной проекции многоугольника.

Изложение указанных вопросов является популярным и доступным учащимся средней общеобразовательной школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни/ А.В. Погорелов-9-е издание- М. : Просвещение, 2009.-175с..: ИЛ.

2. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений/ А. В. Погорелов. -10-е издание. -М.: Просвещение, 2009. -224с.: ИЛ

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для университетов и педагогических институтов. -3-е издание. –Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. -336с. : ИЛ.

4. Сефибеков С. Р. О площади многоугольника// Квант. -1981. -№4. – С.20-21.

5. Сефибеков С.Р. Площадь в координатах// Математика. Все для учителя. -2017. -№1. – 13-21.

6. Сефибеков С.Р. Внеклассная работа по математике: Книга для учителя. – М. : Просвещение, 1988.- 80с.

7. Сефибеков С.Р. Организация элективного курса по математике в средней школе: методические рекомендации для педагогов. – Н. Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014. – 35с.

8. Сефибеков С.Р. Элективный курс по математике в средней школе: методические рекомендации для студентов. – Н. Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014. -28с.

9. Сефибеков С.Р. Психолого-педагогические условия развития математического образования школьников в инновационной школьной среде: монография. – Н. Новгород: НИУ РАНХ и ГС, 2014. – 172с.

10. Сефибеков С.Р. Формирование элементов исследовательской деятельности школьников по математике на основе авторских разработок «За страницами школьного учебника». Канд. дис. пед. наук. Махачкала, ДГПУ, 2004