17 апреля 2017 г.

ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ в ЕГЭ

- Учитель математики МАОУ ЛНИП:
- Ткаченко Лидия Анатольевна
- Московская область, г. Королёв

Простые проценты. Налоги.

a) если величина *A* больше величины *B* на *p*%, то

$$A = B + \frac{p}{100}B = (1 + 0{,}01p)B$$

b) если величина *A* меньше величины *B* на *p*%, то

$$A = B - \frac{p}{100}B = (1 - 0{,}01p)B$$

Сложные проценты. Вклады.

1) Величина S_0, увеличиваемая на p% в течение n периодов в конце n-го этапа становится равной

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

или

$$1+0,01p=\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}}.$$

2) при последовательном изменении величины S_0 на $p_n\%$ в течение n периодов, она становится равной

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)$$

где величины p_n могут быть как положительными при увеличении величины на p%, так и отрицательными при уменьшении величины на p%.

Кредиты

Выбирая кредитную программу, потенциальные заемщики ориентируются на процентную ставку по кредиту. Таких методов существует два: *дифференцированные платежи и аннуитетные платежи*.

Дифференцированные платежи характерны тем, что задолженность по кредиту погашается равномерно начиная с самых первых выплат, а проценты начисляются на фактический остаток. Таким образом, каждый последующий платеж меньше предыдущего.

Аннуитет — начисление равных платежей на весь срок погашения кредита. При этом в первой половине срока погашения задолженность по кредиту практически не гасится — выплачиваются в большей части проценты. Эта особенность делает платежи относительно небольшими, но увеличивает общую сумму начисляемых процентов.

Чтобы наглядно показать разницу в погашении кредита при разных методах начисления платежей, приведем графики погашения кредита в размере 1 000 000 руб., взятого на 20 лет при 12% годовых (серым выделена выплата процентов по кредиту, синим — выплата тела кредита).

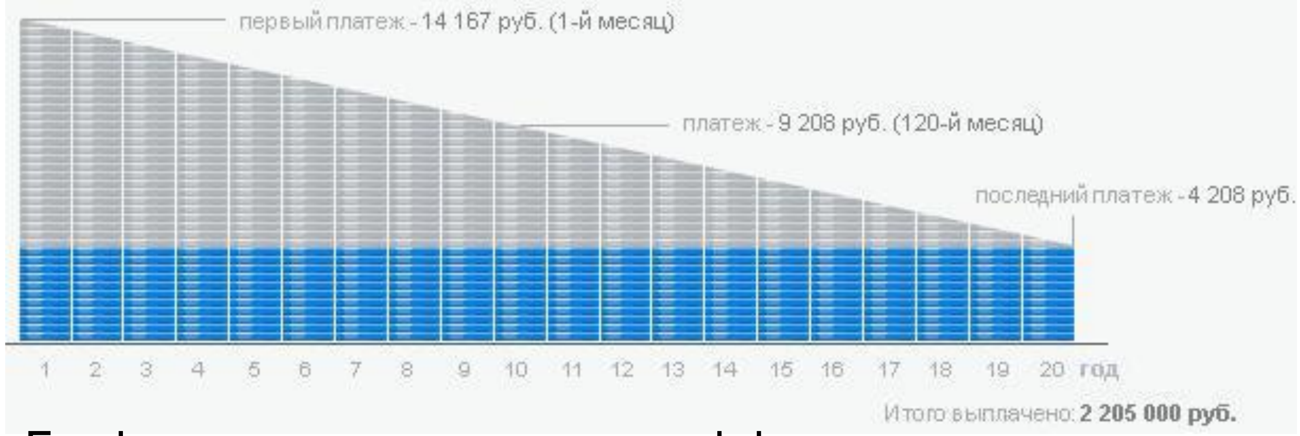


График погашения кредита дифференцированными платежами

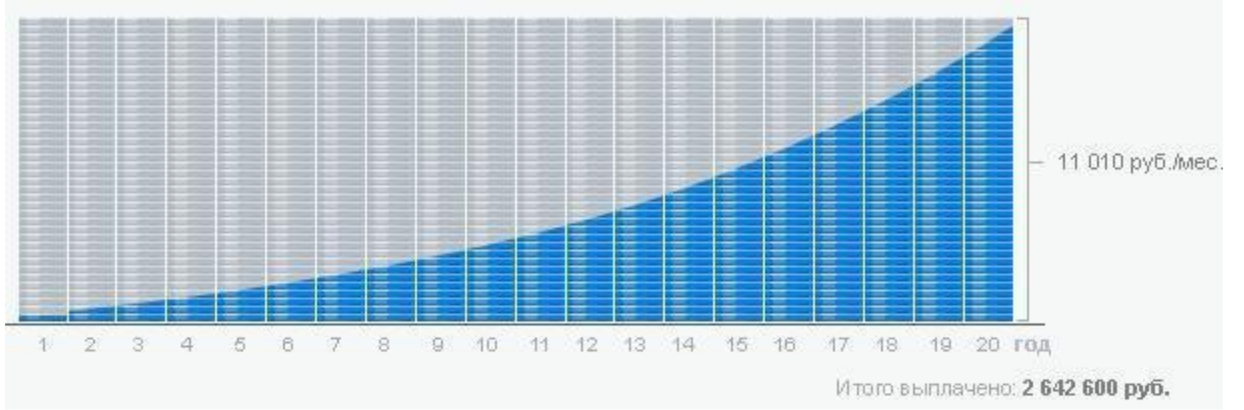


График погашения кредита аннуитетными платежами

Кредиты

Дифференцированные платежи дают линейную зависимость от погашения кредита: чем меньше должен — тем меньше начислили процентов.
Сумма и срок досрочного погашения ничем не ограничены.

Досрочное погашение **в аннуитетной схеме** лишь сокращает срок выплаты кредита: на графике *«срезаются» последние платежи* и отпадает необходимость платить соответствующие им проценты, которые в конце графика как раз очень малы.

Таким образом, в **аннуитетной схеме** досрочное погашение невыгодно.

Теорема об аннуитетных платежах

Обобщая вышеприведенные рассуждения на случай *n* платежных периодов (дней, месяцев, лет), получим общие формулы, связывающие сумму кредита S_0, коэффициент $m = 1 + 0{,}01q$, где $q\%$ — процентная ставка за период, величину текущего долга S_n и постоянную выплату *x*:

$S_n = m^n S_0 - (1 + m + \ldots m^{n-1})x$ и тогда

$$S_n = m^n S_0 - \frac{m^n - 1}{m - 1} x;$$

$$x = \frac{m^n (m-1)}{m^n - 1} S_0;$$

$$S_0 = \frac{m^n - 1}{m^{n+1} - m^n} x;$$

$$n = 1 + \log_m \frac{(2-m)x}{x - S_0(m-1)}$$

Теорема о дифференцированных платежах.

Повторив решение предыдущей задачи для *n* месяцев, получим общие формулы для дифференцированных платежей.

Пусть на *n* платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S_0 , причем каждый платежный период долг сначала возрастет на q% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за все время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П} = \frac{q}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0 \qquad \text{В} = \text{П} + S_0 = S_0\left(1 + \frac{q(n+1)}{200}\right)$$

Задача 1. По вкладу «А» банк начисляет 10% каждый год, а по вкладу «Б» - 5% в первый год и n % за второй и третий годы. Найдите наименьшее целое значение n, при котором за 3 года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

1. Вклад А:

10% в год на 3 года $S_k = (1 + \frac{n}{100})^k S$

n - % вклада, k – количество лет, S – первоначальный взнос,

S_k – сумма в конце k-го года

$$S_3 = (1 + \frac{10}{100})^3 S = 1{,}331S$$

2. Вклад Б:

5% в первый год

$S + 0{,}05S = 1{,}05S$ – в конце первого года,

n % - на второй и третий год

$S_k = (1 + \frac{n}{100})^2 1{,}05\ S$ – сумма за третий год.

Решение

По условию, $\text{Б} > \text{А}$

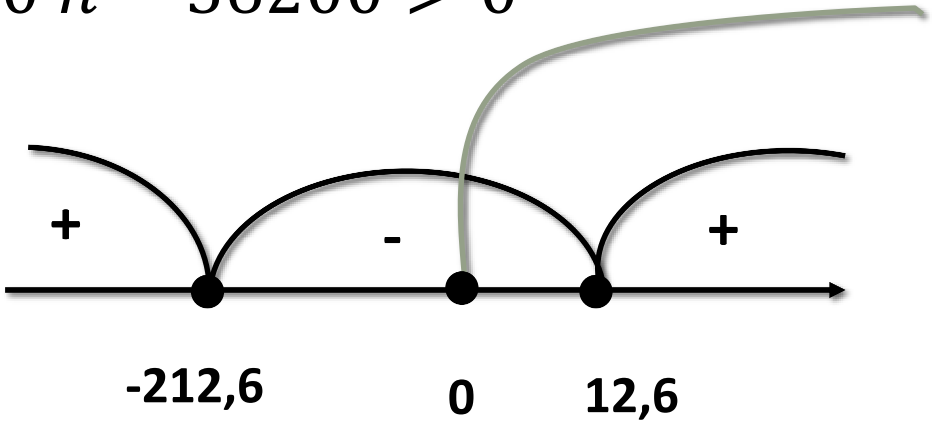
$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 1{,}05\,S > 1{,}331\,S$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1{,}331}{1{,}05}$$

$$1+\frac{n}{50}+\frac{n^2}{10000}-\frac{1331}{1050} > 0$$

$$21\,n^2 + 4200\,n - 56200 > 0$$

$n_1 \approx 12{,}6 \quad n_2 \approx -212{,}6$



Ответ: $n = 13$

Задача 2. Гражданин приобрел ценную бумагу за 7 тысяч рублей. Цена бумаги возрастает каждый год на 2 тысячи рублей. В любой момент гражданин может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет под 10% начислений в год. В течение какого года после покупки гражданин должен продать ценную бумагу, чтобы через 30 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение

Пусть в k-тый год гражданин продает бумагу и кладет средства на счет в банк.

Выгодно класть в банк, когда 10% от текущей цены бумаги будут больше 2 тысяч рублей.

1) (7 + 2k) тысяч рублей ЦЕНА БУМАГИ.

2) Затем он кладет в банк под 10% годовых на (30 – k) лет:

$S_{\text{нов}} = (7+2k)(1+\frac{10}{100})^{(30-k)}$ – финальная сумма.

$S_{\text{нов}}$ должна быть наибольшей, $k \in Z$

3) X- разность между двумя соседними значениями,

$$X = S_{\text{нов}\,(k)} - S_{\text{нов}\,(k-1)}$$

Если $X \geq 0$, то выгодно держать ценную бумагу на руках,

Если $X < 0$, то выгодно класть на счет под %.

$$X = (7+2k)\left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k)} - \left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k+1)}(7+2(k-1)) =$$

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k)}(7+2k) - \left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k)+1}(5+2k) =$$

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k)}(7+2k-1{,}1(5+2k)) = \left(1+\frac{10}{100}\right)^{(30-k)}(1{,}5-0{,}2k)$$

$$1{,}5-0{,}2k<0$$

$$-0{,}2k<-1{,}5$$

$$k>7{,}5$$

Ответ: 7 лет

Задача 3. В июле планируется взять кредит на сумму 4,5 млн рублей сроком на 9 лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на n % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;
- каждый июль сумма долга должна отличаться от предыдущего на равную сумму.

Найдите целое число n, если наибольшая выплата за все время не превышает 1,4 млн рублей, а наименьшая выплата не менее 0,6 млн рублей.

Решение

Наибольшая выплата $\leq 1{,}4$ млн руб.

Наименьшая выплата $\geq 0{,}6$ млн руб.

$$n\ \% - ? \qquad n \in Z$$

Сумма кредита $S = 4{,}5$ млн руб., на 9 лет $\Rightarrow$ разница между июлями

$$A = \frac{S}{9} = 0{,}5 \text{ млн руб.}$$

Каждый раз между июлями n - ?

Решение

	июль	**Январь** (набегает n %, пусть $k=\frac{n}{100}$)	Выплаты февраль-июнь
1	S	$(1+k)S$	$S(1+k)-\left(S-\frac{S}{9}\right)=Sk+\frac{S}{9}$
2	$S-\frac{S}{9}$	$(1+k)(S-\frac{S}{9})$	$(1+k)\left(S-\frac{S}{9}\right)-\left(S-\frac{2S}{9}\right)=\frac{8}{9}Sk+\frac{S}{9}$
3	$S-\frac{2S}{9}$	$(1+k)(S-\frac{2S}{9})$	$\frac{7}{9}Sk+\frac{S}{9}$
4			
…			
8	$S-\frac{7S}{9}$	$(1+k)(S-\frac{7S}{9})$	$\frac{2}{9}Sk+\frac{S}{9}$
9	$S-\frac{8S}{9}$	$(1+k)(S-\frac{8S}{9})$	$\frac{1}{9}Sk+\frac{S}{9}$

Наибольшая выплата – первая, т.е. $Sk + \frac{S}{9} \le 1{,}4$

Наименьшая выплата – последняя, т.е. $\frac{1}{9}Sk + \frac{S}{9} \ge 0{,}6$

$$\begin{cases} Sk + \dfrac{S}{9} \le 1{,}4 \\ \dfrac{1}{9}Sk + \dfrac{S}{9} \ge 0{,}6 \end{cases}$$

Вспомним, что $\frac{S}{9} = 0{,}5$ млн руб., а $S = 4{,}5$ млн руб.

$$\begin{cases} 4{,}5k + 0{,}5 \le 1{,}4 \\ \dfrac{4{,}5\,k}{9} + 0{,}5 \ge 0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4{,}5k \le 0{,}9 \\ \dfrac{4{,}5\,k}{9} \ge 0{,}1 \end{cases} \quad \begin{cases} k \le \dfrac{1}{5} \\ k \ge \dfrac{1}{5} \end{cases} \quad k = \frac{1}{5} \quad n = 100k \quad n = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20$$

Ответ: $n = 20\%$

Задача 4. 31 декабря 2013г. Сергей взял в банке 9 930 000 руб. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа.

Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение

a – сумма кредита,

x – ежегодный платеж,

k % - годовые проценты,

$m = 1 + \frac{k}{100} = 1 + 0{,}01k$ – сумма долга умножается на этот коэффициент 31 декабря.

Решение

	остаток на счете	начисление % 31 декабря	выплаты
1	a	am	x
2	$am - x$	$(am - x)m$	x
3	$(am - x)m - x$	$\big((am - x)m - x\big)m$	x
4	0	$\big((am - x)m - x\big)m - x = 0$	

Решение

$$0 = \big((am - x)m - x\big)m - x$$

$$0 = (am^2 - xm - x)m - x$$

$$0 = am^3 - xm^2 - xm - x$$

$$0 = am^3 - x(m^2 + m + 1)$$

$$0 = am^3 - x\frac{m^3 - 1}{m - 1}$$

$$x = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1}$$

$m = 1 + 0{,}01k = 1 + 0{,}01 \cdot 10 = 1{,}1$

$a = 9930000$

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000\ (\text{руб.})$$

Ответ: $x = 3993000$ рублей

Задача 5.

Гражданин берет 15 января в банке кредит на 19 месяцев. Условия кредита таковы:

- 1 числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца,
- со 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга,
- 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем долг на 15 число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение

S – сумма кредита, r % – ежемесячная % ставка

$k=1+\frac{r}{100}=1+0{,}01r$ – сумма долга умножается на этот коэффициент 1 числа каждого месяца; **в следующий раз набегает k**

	15 января	начисление % 1 числа	выплаты
1	S	Sk	$Sk-\left(S-\frac{S}{19}\right)=\frac{S}{19}+S(k-1)$
2	$S-\frac{S}{19}=\frac{18S}{19}$	$\frac{18S}{19}k$	$\frac{18S}{19}k-\frac{17S}{19}=\frac{S}{19}+\frac{18S}{19}(k-1)$
3	$S-\frac{2S}{19}=\frac{17S}{19}$	$\frac{17S}{19}k$	$\frac{17S}{19}k-\frac{16S}{19}=\frac{S}{19}+\frac{17S}{19}(k-1)$
…			
			$\frac{S}{19}+\frac{S}{19}(k-1)$

Решение

Но общая сумма выплат на 30% больше суммы кредита, т.е. $S + 0{,}3S = 1{,}3S$

Суммируем и приравняем выплаты:

$$\frac{S}{19} + S(k-1) + \frac{S}{19} + \frac{18S}{19}(k-1) + \cdots + \frac{S}{19} + \frac{S}{19}(k-1) = 1{,}3S$$

$$S(k-1)(\underbrace{\frac{1}{19} + \frac{2}{19} + \cdots + \frac{18}{19} + \frac{19}{19}}_{\text{Гаусс}}) = 0{,}3S$$

$$(k-1)(\frac{\frac{1}{19} + \frac{19}{19}}{2}19) = 0{,}3$$

Решение

$$(k-1)\left(\frac{20\cdot 19}{2\cdot 19}\right)=0{,}3$$

$$(k-1)10=0{,}3$$

$$k-1=0{,}03$$

Но $k=1+\frac{r}{100}=1+0{,}01r \Rightarrow k-1=0{,}01r$

$$0{,}01r=0{,}03$$

$$r=3$$

Ответ: $r=3\%$

Список литературы:

1) МАТЕМАТИКА. ЕГЭ. ЗАДАЧА С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ: УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ. / ПОД РЕД. Ф.Ф.ЛЫСЕНКО И С.Ю.КУЛАБУХОВА, РОСТОВ-НА-ДОНУ:ЛЕГИОН, 2015. – 80С.
2) ЕГЭ. МАТЕМАТИКА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ: ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ: 36 ВАРИАНТОВ / ПОД РЕД. И.В.ЯЩЕНКО, ИЗДАТЕЛЬСТВО “НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ”, 2017 – 256С.

3) Д.Д.ГУЩИН, КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ.

ВЕБ-СТРАНИЦА КУРСА С АКТУАЛЬНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ: HTTP://RESHUEGE.RU/COURSE?ID=2610
ИЗДАНИЕ 2, ДОПОЛНЕННОЕ. — 05.04.2016